

自由曲面的高斯曲率计算方法

31

王侃昌, 师帅兵

(西北农林科技大学 机械与工程学院, 陕西 杨陵 西农校区 712100)

[摘 要] 针对用定义方法计算各种不同类型表达方式曲面的高斯曲率中存在的问题, 提出了一种利用局部插值计算曲面点的高斯曲率的方法, 该方法具有明确的几何意义, 适用于各种不同表达方式的自由曲面。

[关键词] 自由曲面; 高斯曲率; 杜潘标线

[中图分类号] O186.1

[文献标识码] A

计算方法 局部插值

在曲面造型中, 曲面在一点附近的形状与在该点曲面的主曲率的乘积即高斯曲率有关, 该点与附近点的高斯曲率比较可以反映出该点附近的形状变化。故可以用高斯曲率来表达该点的形状信息, 对该点附近的形状质量进行评判^[1]。但这一方法中如何计算曲面的高斯曲率成为一个难题。

要求出自由曲面上一点的高斯曲率, 可以根据以往的定义求解, 这种方法需要求曲面的偏导, 计算过程比较复杂, 而且算法与曲面的表示方法有关, 即 Bezier 曲面的高斯曲率与 NURBS 曲面的高斯曲率是不相同的^[2-3]。因此针对不同的曲面表示形式, 需要编制不同的程序来实现。对 NURBS 曲面的各阶偏导是各不相同的, 也需要各阶编不同的程序来实现。本文提出一种不经过求偏导的方法求曲面点的高斯曲率, 这种方法对各种曲面的高斯曲率计算都是统一的, 与 NURBS 曲面的阶数无关, 适用于各种表达方式的曲面。

1 计算原理

如图1所示, 设 $\vec{N}$ 表示曲面 S 在一点 P 上的单位法矢, 切 S 且经过 $\vec{N}$ 的平面与曲面相交成一条曲线, 同样, 不经过 $\vec{N}$ 但经过 P 点的平面与曲面同样也可以相交成一条曲线。让每一个法平面与一个方向及单位切矢 $\vec{t}$ 对应, 即在曲线 P 点, 一个法曲面曲率 k_n 对应一个位置。这个法曲面曲率随着切的平面绕 $\vec{N}$ 的旋转而变化。 k_n 存在最大和最小值, 即为 P 点的主曲率。令 k_1, k_2 代表主曲率, $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ 代表各自对应的切线方向。设 φ 为任意曲率切线方向 $\vec{t}$ 与 $\vec{t}_1$ 的夹角。Leonhard Euler 得出如下关系式:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (1)$$

令以主曲率对应切线方向 $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ 为坐标系, 则任意曲率切线方向 $\vec{t}$ 对应的法曲面曲率在该坐标系的坐标为:

$$x = \pm \frac{\cos \varphi}{(|k_n|)^{1/2}}, \quad y = \pm \frac{\sin \varphi}{(|k_n|)^{1/2}},$$

[收稿日期] 1999-12-30

[作者简介] 王侃昌(1967—), 男, 在读博士。

由欧拉公式则有:

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1. \quad (2)$$

这一公式定义了曲面在 P 点的杜潘标线。如果主曲率同号,那么法曲面曲率在任一方向同号, P 点处曲面整体在切平面的一侧,在这种情况下(1),(2)式表示一个椭圆。如果主曲率不同号, P 点是凸出或凹陷点,在这种情况下(1),(2)式表示一个双曲线。

如果以上坐标轴不是主曲率方向对应的切线方向,则有如下的杜潘标线方程:

$$Ax^2 + 2Cxy + By^2 = \pm 1. \quad (3)$$

当知道任一点的杜潘标线则知道了主曲率的大小和方向。计算在某一方向的法曲率,代入(3)式,然后旋转一个角度,计算杜潘标线。

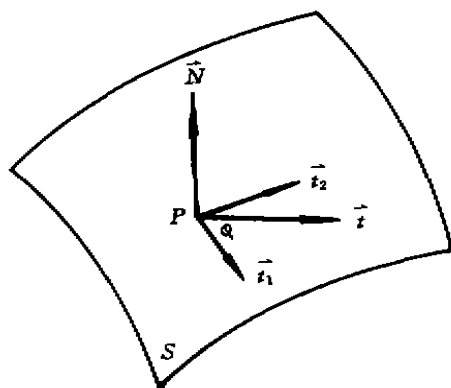


图1 计算原理图

2 具体算法

三维空间的3点确定1个平面,在这一平面内的这3点确定1个球,即确定该球的半径和沿着球的切矢。设3点为 x_{-1}, x_0, x_1 ,则由3点确定的平面内的球的球心可由坐标 (a, b, c) 表示。故其解法如下:

$$\vec{u} = x_1 - x_0 = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\vec{v} = x_{-1} - x_0 = (v_1, v_2, v_3).$$

根据球的定义有

$$\begin{cases} (x_{-1x} - a)^2 + (x_{-1y} - b)^2 + (x_{-1z} - c)^2 = R^2, \\ (x_{1x} - a)^2 + (x_{1y} - b)^2 + (x_{1z} - c)^2 = R^2, \\ (x_{0x} - a)^2 + (x_{0y} - b)^2 + (x_{0z} - c)^2 = R^2; \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 + cu_3 = \frac{|x_0|^2 - |x_1|^2}{2}, \\ av_1 + bv_2 + cv_3 = \frac{|x_0|^2 - |x_{-1}|^2}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

因球心与 x_{-1}, x_0, x_1 在同一平面内, x_0 点和球心的连线与矢量 $\vec{u}, \vec{v}$ 共面,根据3矢量共面的条件有如下的公式:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a - x_{0x} \\ u_2 & v_2 & b - x_{0y} \\ u_3 & v_3 & c - x_{0z} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

(4)和(5)式联立可解得球心坐标。

则 x_0 点的曲率半径单位矢量为

$$\vec{k} = \frac{(a - x_{0x}, b - x_{0y}, c - x_{0z})}{(a - x_{0x})^2 + (b - x_{0y})^2 + (c - x_{0z})^2},$$

x_0 点的单位切矢为:

$$\vec{t} = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{k}}{|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{k}|} \quad (6)$$

设 $P_{i,j}$ 为曲面上要求高斯曲率的点, 可以与其前后左右的点构成 4 条曲线, 即:

$$Q_1 = \{P_{i-1,j-1}, P_{i,j}, P_{i+1,j+1}\},$$

$$Q_2 = \{P_{i,j-1}, P_{i,j}, P_{i,j+1}\},$$

$$Q_3 = \{P_{i-1,j}, P_{i,j}, P_{i+1,j}\},$$

$$Q_4 = \{P_{i+1,i-1}, P_{i,j}, P_{i-1,j+1}\}.$$

用 (4), (5) 和 (6) 式介绍的 3 点求曲率、曲率矢量、切矢的方法, 由这 4 条曲线分别求出 4 个方向的曲率、曲率矢量和切矢。

$$\text{则} \quad \vec{n}_{ij} = \frac{\vec{t}_i \times \vec{t}_j}{|\vec{t}_i \times \vec{t}_j|},$$

最后处理得:

$$\vec{n} = \frac{\sum_{i,j=1}^4 \vec{n}_{ij}}{|\sum_{i,j=1}^4 \vec{n}_{ij}|} \quad (7)$$

这样可以计算出曲面上 P 点的单位法矢。

根据 Jean Meusnier 公式任意 $\vec{t}_i$ 方向的法曲率大小

$$k_{n,i} = \vec{k}_i \cdot \vec{n}. \quad (8)$$

假如定义一个平面 $x-y$, 其垂直于 $\vec{N}$ 。设矢量

$$\vec{P}_i = \frac{\vec{t}_i}{(|k_{n,i}|)^{1/2}} \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (9)$$

因为 P_i 点是杜潘标线 $Ax_i^2 + 2Cxy_i + By_i^2 = \pm 1$ 的点, 故符合公式:

$$Ax_i^2 + 2Cxy_i + By_i^2 = \text{sgn}(k_{n,i}). \quad (10)$$

如果以 $\vec{P}_1$ 作为坐标 x 轴, 设 y 轴的单位矢量为 $\vec{P}_y$, $\vec{P}_y = \vec{P}_1 \times \vec{n}$, P_i 点在平面 $x-y$ 中的坐标为 (x_i, y_i) , 则所有的矢量在该坐标系中的二维坐标为:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|k_{1,i}|}, & y_1 &= 0; \\ x_2 &= \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{|k_{2,i}|}, & y_2 &= \frac{\vec{P}_2 \cdot \vec{P}_y}{|k_{2,i}|}; \\ x_3 &= \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_3}{|k_{3,i}|}, & y_3 &= \frac{\vec{P}_3 \cdot \vec{P}_y}{|k_{3,i}|}; \\ x_4 &= \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_4}{|k_{4,i}|}, & y_4 &= \frac{\vec{P}_4 \cdot \vec{P}_y}{|k_{4,i}|}. \end{aligned}$$

这样 3 个未知量 4 个方程, 是一个拟合问题。可以用最小二乘法求解。针对现有的问题, 把目标函数确定为:

$$F = \sum_{i=1}^4 [Ax_i^2 + 2Cx_iy_i + By_i^2 - \text{sgn}(k_{n,i})]^2, \quad (11)$$

求其最小值,分别对 A, B 和 C 求一阶偏导,得线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3y_i & \sum x_i^2y_i^2 \\ \sum x_i^3y_i & \sum x_i^2y_i^2 & \sum x_iy_i^3 \\ \sum x_i^2y_i^2 & \sum x_iy_i^3 & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 2C \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2\text{sgn}(k_{n,i}) \\ \sum x_iy_i\text{sgn}(k_{n,i}) \\ \sum y_i^2\text{sgn}(k_{n,i}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

将已知 x_i, y_i 分别代入方程,解该二元一次方程即可求得 A, B 和 C 3 个参数。由一般二次曲线的性质可得标准方程为 $k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1$, 其中,

$$k_1 = \frac{1}{2}[A + B + \sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}],$$

$$k_2 = \frac{1}{2}[A + B - \sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}].$$

当 $AB - C^2 > 0$ 时,是椭圆或虚椭圆,两主率同号;当 $AB - C^2 < 0$ 时,是双曲线,两主率异号。

故高斯曲率 $k = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}$, 正负号与以上判断对应。

3 结 论

利用数值算法可以避免微分几何求解的许多问题,成功地将复杂的问题简化为一个简单的数值问题。

[参考文献]

- [1] 苏步青,刘鼎元. 计算几何[M]. 上海:上海科学技术出版社,1980.
- [2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:航空航天大学出版社,1994.
- [3] Farin G. NURBS for Curve and Surface Design[M]. Philadelphia:SIAM,1991.

An algorithm of Gauss curvature on free-surface

WANG Kan-chang, SHI Shuai-bing

(College of Mechanical and Electronics Engineering, Northwest Science and Technology University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: Gauss curvature is an important index of the quality of surface. It is difficult to calculate Gauss curvature, because of the difference of expression of surface. A method is given to obtain curvature's information from a local quadric interpolation. The method has intuitive geometric meaning. The related algorithm suits for any surface.

Key words: free-surface; Gauss curvature; dupin indicatrix