

168-174

第28卷 第6期
2000年12月西北农业大学学报
Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalisVol. 28 No. 6
Dec. 2000

[文章编号] 1000-2782(2000)06-0168-07

Meyer-Konig and Zeller 算子及 Bernstein
算子在内插空间中的逼近

35

张三教

(宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007)

[摘要] 给出了一般内插空间中线性一致有界算子序列逼近的正逆定理, 作为应用, 用 Meyer-Konig and Zeller 算子和 Bernstein 算子给出了一类特殊的内插空间中一致逼近的特征性定理, 其结果为已有的经典 Zygmund 类中相应结论的推广。

[关键词] 内插空间; Meyer-Konig and Zeller 算子; Bernstein 算子

[中图分类号] O174.41 [文献标识码] A

线性有界算子
一致逼近

设 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上之实函数, 则所谓的 Meyer-Konig and Zeller 算子为

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) m_{n,k}(x) \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

这里 $m_{n,k}(x) = \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}$ 。

所谓的 Bernstein 算子为 $B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x) \quad x \in [0, 1], \quad (2)$

其中, $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ 。

令 $C_0 = \{f \in C[0, 1]; f(0) = f(1) = 0\}$, $C_2^2 = \{f \in C_0; f'' \in CB(0, 1)\}$ (这里 $CB(0, 1)$ 指在 $(0, 1)$ 上有界连续的函数类), 并赋予范数 $\|f\|_{C_2^2} = \sup_x |f''(x)|$ 。

作 K 泛函 $K(t; f) = \inf_{g \in C_2^2} \{ \|f - g\|_C + t \|g\|_{C_2^2} \} \quad (0 < t \leq 1)$,

及中间空间 $(C_0, C_2^2)_\alpha = \{f \in C_0; \|f\|_{(C_0, C_2^2)_\alpha} = \sup_{0 < t \leq 1} [t^{-\frac{\alpha}{2}} K(t; f)] < +\infty\}$,

和 Zygmund 类 $Lip_2 \alpha = \{f \in C[0, 1]; \omega_2(f; \delta) = O(\delta^\alpha), \delta \rightarrow 0\}$

其中, $\omega_2(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{x \in [h, 1-h]} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|$ 。则对 $0 < \alpha < 2$ 有^[1,2]

$$|B_n(f; x) - f(x)| = O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow f \in (C_0, C_2^2)_\alpha, \quad (3)$$

$$|M_n(f; x) - f(x)| = O\left(\frac{x(1-x)^2}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow f \in (C_0, C_2^2)_\alpha. \quad (4)$$

显然, $(C_0, C_2^2)_\alpha$ 为一特殊的内插空间。式(3), (4)提示, 可否在一般的内插空间^[3]内考虑此

[收稿日期] 2000-04-24

[基金项目] 宝鸡文理学院科研基金资助项目(2000002)

[作者简介] 张三教(1952-), 男, 副教授。

类问题。

为此,先给出一个一般性的结果,用 $\mathcal{B}(A \rightarrow B, C)$ 表示将空间 A 中的元素映射到空间 B 中的线性有界算子的集合。则下面的定理 1。

定理 1 设空间偶 (A_0, A_1) 及线性算子列 $L_n \in \mathcal{B}(A_1 \rightarrow A_1, C)$ ($i=0, 1$), $A_1 \subset A_0$, $L_n \in \mathcal{B}(A_0 \rightarrow A_1, C)$, 且对 $0 < \alpha$ 有

$$(I) \quad \|L_n(a)\|_{A_0} \leq M \|a\|_{A_0}, a \in A_0; \quad (5)$$

$$(II) \quad \|L_n(a)\|_{A_1} \leq Mn^\alpha \|a\|_{A_0}, a \in A_0; \quad (6)$$

$$(III) \quad \|L_n(a_1)\|_{A_1} \leq M \|a_1\|_{A_1}, a_1 \in A_1; \quad (7)$$

$$(IV) \quad \|L_n(a_1) - a_1\|_{A_0} \leq Mn^{-\alpha} \|a_1\|_{A_1}, a_1 \in A_1. \quad (8)$$

此处 M 表示常数。当 $a \in A_0$ 时, 对 $1 \leq q < +\infty, 0 < \theta < \alpha$ 有

$$\|a\|_{A_0} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^\theta \|L_n(a) - a\|_{A_0})^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \left(\int_0^1 (t^{-\theta} K(t^\alpha, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0}, \quad (9)$$

且当 $q = \infty$ 时, 对 $a \in A_0 (0 < \theta < \alpha)$ 有 $\|L_n(a) - a\|_{A_0} = O(n^{-\theta}) \Leftrightarrow K(t^\alpha, a) = O(t^\theta)$ 。这时 K 泛函 $K(t, a)$ 为 $K(t^\alpha, a) = \inf_{a_1 \in A_1} (\|a - a_1\|_{A_0} + t^\alpha \|a_1\|_{A_1})$ 。

证明 先证明充分性。对任意 $a \in (A_0, A_1)_{\theta, q}$ 有

$$\begin{aligned} \|L_n(a) - a\|_{A_0} &\leq \|L_n(a - a_1)\|_{A_0} + \|L_n(a_1) - a_1\|_{A_0} + \|a - a_1\|_{A_0} \leq \\ &(M+1)(\|a - a_1\|_{A_0} + n^{-\alpha} \|a_1\|_{A_1}). \end{aligned}$$

两边对 a_1 取 $\inf$ 有 $\|L_n(a) - a\|_{A_0} \leq (M+1)K(n^{-\alpha}, a)$, 因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n^\theta \|L_n(a) - a\|_{A_0})^q \frac{1}{n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (n^\theta \|L_n(a) - a\|_{A_0})^q \frac{1}{n} \leq \\ &\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (2^{(k+1)\theta} (M+1)K(2^{-\alpha k}, a))^q \leq \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((M+1)2^{1+\theta})^q}{\ln 2} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (t^{-\theta} K(t^\alpha, a))^q \frac{dt}{t} \leq \\ &M_1 \int_0^1 (t^{-\theta} K(t^\alpha, a))^q \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

因此, 对 $a \in A_0$ 有

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^\theta \|L_n(a) - a\|_{A_0})^q \frac{1}{n} \right\}^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0} \leq M_2 \left\{ \int_0^1 (t^{-\theta} K(t^\alpha, a))^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0}.$$

下面证明另一个方面。由假设, 对 $a \in A_0$ 及 $a_1 \in A_1$ 有

$$\begin{aligned} \|L_n(a)\|_{A_1} &\leq \|L_n(a) - L_n(a_1)\|_{A_1} + \|L_n(a_1)\|_{A_1} \leq \\ &Mn^\alpha (\|a - a_1\|_{A_1} + n^{-\alpha} \|a_1\|_{A_1}). \end{aligned}$$

因此有 $\|L_n(a)\|_{A_1} \leq Mn^\alpha K(n^{-\alpha}, a)$. (10)

取 r 为正数(待定), 由 K 泛函的性质得

$$I = \int_0^1 [t^{-\theta} K(t^\alpha, a)]^q \frac{dt}{t} \leq r^{-\theta q} \ln r \sum_{k=0}^{\infty} [r^{k\theta} K(r^{-k\alpha}, a)]^q.$$

取 n_k 使 $r^k \leq n_k \leq r^{k+1}$ 且 $\|L_{n_k}(u) - a\|_{A_0} = \min_{r^k \leq n \leq r^{k+1}} \|L_n(u) - a\|_{A_0}$, 则由 K 泛函的定义有

$$\begin{aligned} K(r^{-k\sigma}, a) &\leq \|a - L_{n_k}(u)\|_{A_0} + r^{-k\sigma} \|L_{n_k}(u)\|_{A_1} \leq \|a - L_{n_k}(u)\|_{A_0} + r^{-k\sigma} M n^{\sigma} K(n_k^{-\sigma}, a) \leq \\ &\|a - L_{n_k}(u)\|_{A_0} + M(r^{-k} n_k)^{\sigma} \|a - L_{n_{k-1}}(u)\|_{A_0} + M r^{-k\sigma} \|L_{n_{k-1}}(u)\|_{A_1} \leq \\ &\|a - L_{n_k}(u)\|_{A_0} + \sum_{m=0}^{k-1} (r^{-k} n_{k-m})^{\sigma} M^{m+1} \|a - L_{n_{k-m-1}}(u)\|_{A_0} + M^{k+1} (n_0 r^{-k})^{\sigma} K(n_0^{-\sigma}, a). \end{aligned}$$

$$\text{令 } I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{k\theta} \|a - L_{n_k}(u)\|_{A_0})^q,$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^{k\theta} \sum_{m=0}^{k-1} (r^{-k} n_{k-m})^{\sigma} M^{m+1} \|a - L_{n_{k-m-1}}(u)\|_{A_0} \right)^q,$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{k\theta} (r^{-k} n_0)^{\sigma} M^{k+1} K(n_0^{-\sigma}, a))^q. \text{ 由凸函数的性质有: } I \leq C(I_1 + I_2 + I_3), \text{ 因为}$$

$K(n_0^{-\sigma}, a) \leq K(1, a) \leq C$ (常数), 因而 $I_3 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (r^{\theta-\sigma} M)^{kq}$. 选择 r 使 $r^{\theta-\sigma} M < \frac{1}{2}$, 如可选 $r > (2M)^{\frac{1}{\sigma-\theta}}$, 则有

$$I_3 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (r^{\theta-\sigma} M)^{kq} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{kq} < +\infty,$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=r^k}^{r^{k+1}-1} (r^{k\theta} \|u - L_n(u)\|_{A_0})^q \frac{1}{n} \leq \\ &C \sum_{k=1}^{\infty} (n^{\theta} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^q \frac{1}{n} < +\infty. \end{aligned}$$

令 $l = k - m - 1$, 则

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(r^{k\theta} \sum_{l=0}^{k-1} (r^{-k} r^{l+2})^{\sigma} M^{k-l} \|u - L_{n_l}(a)\|_{A_0} \right)^q = \\ &C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} (r^{\theta-\sigma} M)^{k-l} r^{l\theta} \|a - L_{n_l}(a)\|_{A_0} \right)^q. \end{aligned}$$

不失一般性, 令 $0 < C = \sum_{l=0}^{\infty} (r^{\theta-\sigma} M)^l < +\infty$, 则

$$I_2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{k-1} (r^{\theta-\sigma} M)^{k-l} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(r^{\theta-\sigma} M)^{k-l}}{\sum_{l=0}^{k-1} (r^{\theta-\sigma} M)^{k-l}} r^{l\theta} \|a - L_{n_l}(a)\|_{A_0} \right]^q \leq$$

$$C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{(r^{\theta-\sigma} M)^{k-l}}{\sum_{l=0}^{k-1} (r^{\theta-\sigma} M)^{k-l}} (r^{l\theta} \|a - L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q \leq$$

$$C \sum_{l=0}^{\infty} (r^{l\theta} \|a - L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q \leq$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^q \frac{1}{n} < +\infty,$$

因此有
$$I \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\theta} \|a - L_n(a)\|_{A_0} \right)^q \frac{1}{n},$$
 从而(9)式得证。

下面证明 $q = \infty$ 时的情形, 由(5)~(8)式, 对 $a \in A_0$ 有

$$\begin{aligned} K(t^{\theta}, a) &\leq \|a - L_n(a)\|_{A_0} + t^{\theta} \|L_n(a)\|_{A_1} \leq \\ &\|a - L_n(a)\|_{A_0} + Mt^{\theta} n^{\alpha} K(n^{-\alpha}, a). \end{aligned}$$

取 $A \in N$ (A 待定), $t = A^{-m-1}$ ($m \in N$) 及 $n \in N, n-1 \leq A^m < n$ 则有

$$K(A^{-\alpha(m+1)}, a) \leq M(A^{-m\theta} + A^{-\alpha} K(A^{-\alpha m}, a)).$$

$$\begin{aligned} \text{令 } v_m &= A^{m\theta} K(A^{-\alpha m}, a), \text{ 则 } v_{m+1} = A^{(m+1)\theta} K(A^{-\alpha(m+1)}, a) \leq \\ &A^{(m+1)\theta} M A^{-m\theta} + A^{\theta-\alpha} M A^{m\theta} K(A^{-\alpha m}, a) = M A^{\theta} + M A^{\theta-\alpha} v_m. \end{aligned}$$

因为 $\theta < \alpha$, 因而选 A , 使 $A^{\theta-\alpha} < \frac{1}{M}$, 这时 $v_{m+1} \leq \max\{M A^{\theta}, v_m\} \leq \max\{M A^{\theta}, v_1\}$. 因为 $v_1 = A^{\theta} K(A^{-\alpha}, a) < +\infty$, 因此 $v_m < +\infty$ 即 $K(A^{-m\alpha}, a) \leq M A^{-m\theta}$, 因而得 $K(t^{\theta}, a) = O(t^{\theta})$.

充分性为显然的. 因而有(9)式成立.

作为应用, 给出了有关算子(1)和(2)式的具体结果. 进一步令 $C_{\theta} = \{g \in C_0: \varphi^{-\frac{\theta}{2}} g \in C_{[0,1]}\}$, $C_{\theta}^2 = \{g \in C_0: \varphi^{-\frac{\theta}{2}} g \in C_{[0,1]} \text{ 及 } \varphi^{-\frac{\theta}{2}} g'' \in C_{[0,1]}\}$ 且赋予半范数

$$\|g\|_{C_{\theta}^2} = \|g\|_{C_0} = \|\varphi^{-\frac{\theta}{2}} g''\|_C + \|\varphi^{-\frac{\theta}{2}} g\|_C, \quad \|g\|_{C_{\theta}} = \|\varphi^{-\frac{\theta}{2}} g\|_C.$$

令 $A_0 = C_{\theta}$, $A_1 = C_{\theta}^2$ 构成内插空间 $(A_0, A_1)_{\theta, q} = (C_{\theta}, C_{\theta}^2)_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq +\infty$), 而对于算子 $B_n(f; x)$, 则 $\varphi(x) = x(1-x)$; 对于算子 $M_n(f; x)$, 则 $\varphi(x) = x(1-x)^2$. 这时 K 泛函为 $K(t) = K(t, C_{\theta}, C_{\theta}^2) = \inf_{g \in C_{\theta}^2} (\|f - g\|_{C_{\theta}} + t \|g\|_{C_{\theta}^2})$.

定理 2 对 $f \in C_{\theta}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq q < +\infty$) 有

$$\|f\|_{C_{\theta}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\theta} \|B_n(f) - f\|_{C_{\theta}} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|f\|_{C_{\theta}} + \left(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta} K(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{及} \quad &\|f\|_{C_{\theta}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\theta} \|M_n(f) - f\|_{C_{\theta}} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|f\|_{C_{\theta}} + \\ &\left(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta} K(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (12)$$

当 $q = \infty$ 时 $\|B_n(f) - f\|_{C_{\theta}} = O(n^{-\theta}) \Leftrightarrow K(t) = O(t^{\theta})$,

$$\|M_n(f) - f\|_{C_{\theta}} = O(n^{-\theta}) \Leftrightarrow K(t) = O(t^{\theta}).$$

这里对算子 B_n 有 $\varphi(x) = x(1-x)$, 而对算子 M_n 有 $\varphi(x) = x(1-x)^2$.

要证明(11)式需要下面引理 1.

引理 1 对算子 $B_n(f; x)$ 有下面几个关系

$$(I) \quad \|B_n(f)\|_{C_{\theta}} \leq M \|f\|_{C_{\theta}}, f \in C_{\theta}; \quad (13)$$

$$(II) \quad \|B_n(f)\|_{C_{\theta}^2} \leq Mn \|f\|_{C_{\theta}}, f \in C_{\theta}; \quad (14)$$

$$(III) \quad \|B_n(f)\|_{C_{\theta}^2} \leq M \|f\|_{C_{\theta}^2}, f \in C_{\theta}^2; \quad (15)$$

$$(IV) \quad \|B_n(f) - f\|_{C_{\theta}} \leq \frac{M}{n} \|f\|_{C_{\theta}^2}, f \in C_{\theta}^2. \quad (16)$$

证明 (13)式的证明. 由 Holder 不等式

$$B_n(f; x) \leq \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} b_{n,k}(x) \|f\|_{C_\alpha} \leq \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) b_{n,k}(x) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{C_\alpha}$$

因为 $B_n(t(1-t); x) \leq x(1-x) = \varphi(x)$ 时, 因此 $\|B_n(f)\|_{C_\alpha} \leq \|f\|_{C_\alpha}$ 。

下面证明 (14) 式。当 $1 \leq nx(1-x)$ 时

$$B_n^*(f; x) = \frac{1}{x(1-x)} \sum_{k=0}^n \{ (k-nx)^2 - (1-2x)k - nx^2 \} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x)。$$

由于

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k} b_{n,k} \leq \begin{cases} \frac{2}{x}, \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{nx^2}, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^n | (k-nx)^2 - (1-2x)k - nx^2 | b_{n,k}(x) \leq 2nx(1-x), \text{ 因而}$$

$$B_n^*(f; x) \leq \frac{1}{(x(1-x))^2} |2nx(1-x)|^{1-\frac{\alpha}{2}} \left\{ 2nx(1-x) \left(x(1-x) + \frac{1}{n} \right) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{C_\alpha},$$

因此

$$|x(1-x)|^{1-\frac{\alpha}{2}} |B_n^*(f; x)| \leq 4n \|f\|_{C_\alpha}。$$

当 $nx(1-x) \leq 1$ 时, 由于

$$B_n^*(f; x) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} b_{n-2,k}(x),$$

因此

$$|B_n^*(f; x)| \leq 4^{1-\frac{\alpha}{2}} n^2 \left\{ 8 \left(x(1-x) + \frac{1}{n} \right) \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{C_\alpha}。$$

这里用到了

$$\sum_{k=0}^n \{ (k-nx)^2 - (1-2x)k - nx^2 \} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) b_{n,k}(x) \leq 2nx(1-x) \left(x(1-x) + \frac{1}{n} \right)$$

及

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \frac{k+2}{n} \left(1 - \frac{k+2}{n} \right) + 2 \frac{k+1}{n} \left(1 - \frac{k+1}{n} \right) + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right\} b_{n-2,k}(x) \leq 8 \left(x(1-x) + \frac{1}{n} \right)。$$

对于 $g(x) \in C_0^\alpha$ 有 $g(t) - g(x) = (t-x)g'(x) + \int_x^t \int_x^s g''(u) du ds$ 。

因而 $|B_n(g; x) - g(x)| \leq B_n \left(\|g\|_{C_0^\alpha} \int_x^t \int_x^s \frac{du ds}{(u(1-u))^{1-\frac{\alpha}{2}}} ; x \right)。$

因为

$$\int_x^t \int_x^s \frac{du ds}{(u(1-u))^{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{(t-x)^2}{(x(1-x))^{1-\frac{\alpha}{2}}}, x \in (0, 1),$$

因此

$$|B_n(g; x) - g(x)| \leq M \|g\|_{C_0^\alpha} (x(1-x))^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

$$|B_n((t-x)^\alpha; x)| \leq \frac{M}{n} (x(1-x))^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\|B_n(g) - g\|_{C_\alpha} \leq M \|g\|_{C_0^\alpha}。$$

由于

$$B_n^*(g; x) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ g\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2g\left(\frac{k+1}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right\} b_{n-2,k}(x) =$$

$$n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \Delta_{\frac{2}{n}}^2 g\left(\frac{k}{n}\right) b_{n-2,k}(x)$$

$$\text{而} \quad \Delta_n^1 g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k+2}{n}} \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k+2}{n}} g''(u) du ds + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g''(u) du ds,$$

$$\text{因此} \quad |\Delta_n^1\left(\frac{k}{n}\right)| \leq \|g\|_{C_a} \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k+2}{n}} \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k+2}{n}} \frac{du ds}{(u(1-u))^{-\frac{\alpha}{2}}} \leq 2 \|g\|_{C_a} \left(\frac{k+1}{n} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{1}{n^2},$$

$$\text{因此} \quad |B_n^*(g)| \leq M \|g\|_{C_a} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{k+1}{n} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} b_{n-2,k}(x) \leq \\ M \|g\|_{C_a} (x(1-x))^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{因此} \quad \|B_n(g)\|_{C_a} \leq M \|g\|_{C_a}.$$

由引理 1 及定理 1 知定理 2 中的 (11) 式成立。下面证明 (12) 式。由定理 1 仅需证明下面的引理 2。

引理 2 对于算子 $M_n(f; x)$, 下面几个关系成立:

$$(I) \quad \|M_n(f)\|_{C_a} \leq M \|f\|_{C_a}, f \in C_a; \quad (17)$$

$$(I) \quad \|M_n(f)\|_{C_p} \leq M n \|f\|_{C_a}, f \in C_a; \quad (18)$$

$$(II) \quad \|M_n(f)\|_{C_p} \leq M \|f\|_{C_p}, f \in C_a^2; \quad (19)$$

$$(IV) \quad \|M_n(f) - f\|_{C_a} \leq \frac{M}{n} \|f\|_{C_p}, f \in C_a^2 \quad (20)$$

证明 (17) 式易证。下面证明 (18) 式, 直接计算得

$$M_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n+k}\right) r_{n,k}(x) m_{n,k}(x). \quad (21)$$

$$\text{其中,} \quad r_{n,k}(x) = \frac{1}{x^2} \left\{ \left[k - \frac{(n+1)x^2}{1-x} \right]^2 - \left[k - \frac{(n+1)x}{1-x} \right] \right\} - \frac{n+1}{x(1-x)^2}.$$

因而, 当 $\varphi(x) = x(1-x)^2$ 时

$$|M_n^*(f; x)| \leq A \|f\|_a \left\{ \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n+k}\right) |r_{n,k}(x)| |m_{n,k}(x)| \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \frac{n+1}{\varphi(x)} \right\}^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

因为 $\sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n+k}\right) |r_{n,k}(x)| |m_{n,k}(x)| \leq 7(n+1)$, 因而 (18) 式得证。

下面证明 (19) 式, 易证

$$M_n^*(f; x) = (1-x)^{-2} \sum_{k=0}^n (\Delta_{n,k} f) m_{n,k}(x), \quad (22)$$

这里

$$\Delta_{n,k} f = (n+k+1) \left[(n+k+2) f\left(\frac{k+2}{n+k+2}\right) - \right. \\ \left. 2(n+k+1) f\left(\frac{k+1}{n+k+1}\right) + (n+k) f\left(\frac{k}{n+k}\right) \right].$$

由于

$$\frac{n^2}{(n+k)(n+k+2)} \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k-1)n}{(n+k+2)(n-1)} \binom{n-2+k}{k} \leq 2 \binom{n-2+k}{k},$$

则

$$|M_n^*(f; x)| \leq 8 \|f\|_{C_p} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1} m_{n-2,0}(x) + 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{n-2,k}(x)}{\varphi\left(\frac{k}{n+k-2}\right)} \right\}^{1-\frac{\alpha}{2}},$$

因而 $|M_n(g; x) - g(x)| \leq \|g\|_{C_2} M_n \left(\int_x^t \int_x^s \frac{duds}{(u(1-u)^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}; x \right).$

因为 $\int_x^t \int_x^s \frac{duds}{(u(1-u)^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{(t-x)^2}{(x(1-x)^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}, x \in (0, 1),$

因此 $|M_n(g; x) - g(x)| \leq \|g\|_{C_2} (\varphi(x))^{\frac{\alpha}{2}-1} M_n((t-x)^2; x) \leq$
 $\|g\|_{C_2} [\varphi(x)]^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{M}{n} \varphi(x).$

这里用到了关系

$$\left(1 + \frac{2x}{n+2}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1} \leq M_n((t-x)^2; x) \leq \left(1 + \frac{2x}{n-1}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1},$$

于是 $\|M_n(g) - g\|_{C_2} \leq \frac{M}{n} \|g\|_{C_2}.$

因此(20)式证明完毕。由引理 2 及定理 1 得定理 2 中的(12)式。

[参考文献]

- [1] Becker M, Nessel R J. A global approximation theorem for Meyer Konig and Zeller operators[J]. Math Z, 1978, 160(2): 195—206.
- [2] Betens H, Lorentz G G. Inverse theorem for Bernstein Polynomials[J]. Indiana Univ Math J, 1972, 21(8): 639—707.
- [3] Bergh J, Lofstrom J. Interpolation spaces. An Introduction[M]. Berlin: Springer-verlag, World Publishing Corp, 1976. 28—54.

On approximation by Meyer-Konig and Zeller operators and Bernstein operators in interpolation spaces

ZHANG San-ao

(Department of Math., Baoji College of Arts and Science, Baoji, Shaanxi 721007, China)

Abstract: The direct and inverse theorem of approximating by linear bounded operator sequences in generalized interpolation spaces are obtained. In application, the characterization theorems of Meyer-Konig and Zeller operators and Bernstein operators in a special interpolation space are presented. The results obtained in this paper generalize the correspondences in classical Zygmund class.

Key words: interpolation space; Meyer-Konig and Zeller operators; Bernstein operators