灌区地下水动态调控数学模型的建立及求解

魏晓姝[1] 李佩成[2]
(1西北农业大学水利与建筑工程学院,陕西杨凌 712100)
(2西安工程学院水工系,西安 710054)

摘 要 充分考虑降水、渠灌、井灌开采对灌区地下水动态的综合影响,根据隔离井法的思路,从灌区抽水具有间歇性的特点出发,将开采期-水位恢复期作为一个计算时段分别建立和求解地下水动态调控的数学模型,再将各计算时段看作是一个连续、互馈的动态过程,利用该模型便可实现灌区地下水动态的调控计算。

关键词 灌区,地下水动态,数学模型
分类号 P641.2, S273.4

井渠结合的灌区,地下水的动态不仅受到降水等自然因素的影响,而且也与灌溉、开采等人类活动的作用方式和程度密切相关[1]。在大面积井渠结合灌溉条件下,充分考虑降水、渠灌和井灌开采(涉及井距、井径、开采时间、开采降深或开采量)等因素对地下水动态的综合影响,用系统和动态的观点定量研究地下水动态的调控问题,对于灌区水资源的持续、高效利用具有十分重要的意义。

1 建模的基本思路

1.1 灌排典型井的概化

灌区的水井大多具有灌溉和排水的双重作用,其井群一般规模较大,井数较多,实际上形成了井网。根据隔离井法的思想[2],在大面积井渠结合条件下,灌区地下水动态的调控计算问题可以转化为位于圆形隔水边界中典型井(单井)在一定采、补条件下的渗流计算问题。

1.2 灌排典型井的工作特征

灌区地下水开发利用现状调查资料表明[①~③],灌排典型井的工作具有抽水(开采)与水位恢复交替进行的间歇性特征,即在某一个灌溉季节中,根据作物的需水要求,连续抽水一段时间后,便停止抽水,地下水位开始恢复;当进入下一个灌溉季节后,再开始连续抽水一段时间,再停抽,地下水位再恢复。而且,一般情况下,水位恢复时间比抽水时间长,这样可以近似认为恢复后的地下水位是基本水平的。

1.3 灌排典型井的补给特征

对于灌排典型井来说,在其控制范围内地下水的补给主要有降水入渗补给、渠系渗漏

收稿日期 1998-05-20
课题来源 国家教委博士点基金资助项目, 910709
作者简介 魏晓姝,女, 1957年生,副教授,博士
① 西北农业大学水建学院,乾县水政水资办. 乾县水资源评价及开发利用现状分析, 1991
② 礼泉县水政水资办. 礼泉县水资源评价及开发利用现状分析, 1992
③ 西北农业大学水建学院,兴平县水利局. 兴平县水资源评价及开发利用现状分析, 1992

补给、田间灌溉 (渠灌和井灌)入渗补给等 ,这些补给要素既受自然因素的影响 ,又受人为因素的制约 ,其入渗补给强度的大小是随时间而变化的量。但对于大面积井渠结合的灌区来说 ,可以综合考虑这些补给要素对地下水动态的影响 ,在某个计算时段的开采期和水位恢复期分别将其入渗补给强度看作是常数 ,而在整个调控计算期看作是随计算时段而变的变量 ,以便使所建立的地下水动态调控的数学模型既能反映灌区的实际情况 ,又具有一定的可操作性。

根据以上分析 ,灌区地下水动态调控数学模型建立的思路可以概括为:① 首先依据灌区井群布局方式进行典型井概化;② 根据灌溉制度和地下水开采方案 (开采时间和开采降深) ,按开采期 – 水位恢复期作为一个计算时段对调控计算期进行离散;③ 在计算时段中 ,综合考虑降水入渗、灌溉入渗等作用 ,分别建立开采期和水位恢复期地下水位动态调控的数学模型;④ 将各计算时段看作是一个连续、互馈的动态过程 ,这样便可以利用该数学模型对灌区整个调控计算期的地下水动态进行研究。

2 地下水动态调控数学模型的建立

根据灌区灌排典型井具有开采和水位恢复交替进行的间歇性工作特征 ,分开采期和水位恢复期分别建立数学模型。

2.1 开采期地下水动态调控的数学模型

灌排典型井在开采期的工作条件可以概化为:① 潜水含水层均质各向同性;② 完整井定降深抽水;③ 存在上部垂直入渗补给;④ 抽水前潜水位水平;⑤ 隔水底板水平。

综合上述条件 ,开采期地下水动态调控的数学模型为:

$$
\mathrm{I}\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial t}= a\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}\right]+\dfrac{k_1}{\_} & (1)\\
H(r,0)= H_0 & (2)\\
H(r_0,t)= h_0 & (3)\\
\dfrac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=R_0}= 0 & (4)
\end{cases}
$$

式中 , $H(r,t)$为抽水 t时刻距抽水井 r处的水位 (m); r为计算点距井的径向距离 (m); t为抽水时间 (d); a为水位传导系数 (m^2/d), $a=\frac{KH_P}{\_}$,其中 K为含水层的渗透系数 (m/d); H_P为计算时段的平均含水层厚度 (m), _ 为给水度; k_1为开采期的垂直入渗补给强度 (m/d); H_0为起始水位 (m); r_0为井半径 (m); h_0为井水位 (m); R_0为取水半径 (m)。

2.2 水位恢复期地下水动态调控的数学模型

若灌排典型井在灌溉季节抽水 t_0(d)时段后 ,停止抽水 ,相应地下水动态调控的数学模型为:

$$
\mathrm{II}\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial f}= a\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}\right]+\dfrac{k_2}{\_} & (5)\\
H(r,0)= f(r) & (6)\\
\dfrac{\partial H}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r_0\\ r_0\to 0}}= 0 & (7)\\
\dfrac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=R_0}= 0 & (8)
\end{cases}
$$

式中, $H(r, f)$为水位恢复 f时刻距井 r处的水位(m); f为水位恢复时间(d); k_2为水位恢复期的垂直入渗补给强度(m/d); $f(r)$为抽水停止时刻(水位开始恢复时刻)典型井控制范围内的地下水位曲线,即数学模型I 的解;其余符号同(1)~(4)式。

数学模型I 和II 均是集中参数线性确定性数学模型。

3 地下水动态调控数学模型的求解

3.1 数学模型I 的求解

对于开采期地下水位动态调控的数学模型,参考文献[2]已求得了其解,即开采期典型井控制范围内的地下水位计算公式为:

$$H(x,t) = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 U t} - \frac{\pi k}{\_} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U\lambda_n^2} D_n h(\lambda_n x) \left[1 - e^{-\lambda_n^2 U t}\right] \tag{9}$$

式中, $x_0 = r_0 / R_0$为相对井半径; $x = r / R_0$为相对径向距离; $U = a / R_0^2$.

$$D_n = \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \tag{10}$$

$$h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n x) \tag{11}$$

λ_n值由超越方程确定。

$$J_0(\lambda_n x_0) Y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n x_0) = 0 \tag{12}$$

式中, $J_0(\lambda_n x_0)$, $J_1(\lambda_n)$分别为第一类零阶和一阶贝塞尔函数; $Y_0(\lambda_n x_0)$, $Y_1(\lambda_n)$分别为第二类零阶和一阶贝塞尔函数; $S_0 = H_0 - h_0$,为井壁水位降深(m)。

在灌溉期,若连续抽水时间为 t(d),则典型井的开采量为

$$Q_k = \frac{4\pi K h_0 S_0}{U} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n)\left[1 - e^{-\lambda_n^2 U t}\right]}{\lambda_n^2 \left[J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)\right]} + \frac{4\pi K h_0 k}{\_} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n) \cdot \left[U\lambda_n^2 t - 1 + e^{-\lambda_n^2 U t}\right]}{(U\lambda_n^2)^2 \left[J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)\right]} \tag{13}$$

3.2 数学模型II 的求解

数学模型II 中的(5)式是一个非齐次二阶线性偏微分方程,其定解问题尚无现成解可寻。为此,本研究应用数学物理方程的有关理论和方法[2,3]对该数学模型进行了求解。

首先令

$$H(r, f) = U(r, f) + V(r, f) \tag{14}$$

其中, $U(r, f)$应满足齐次方程和如下定解条件

$$\text{III}\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial f} = a\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\right] & (15) \\ U(r, 0) = f(r) & (16) \\ \dfrac{\partial U}{\partial r}\Big|_{\substack{r = r_0 \\ r_0 \to 0}} = +0 & (17) \\ \dfrac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r = R_0} = 0 & (18) \end{cases}$$

而 $V(r, f)$应满足非齐次方程和如下定解条件

$$
\mathrm{IV}\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial \mathrm{f}} = a\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r}\right] + \dfrac{\mathrm{k}^2}{\_} & (19)\\
V(r,0) = 0 & (20)\\
\dfrac{\partial V}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r_0\\ r_0\to 0}} = 0 & (21)\\
\dfrac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=R_0} = 0 & (22)
\end{cases}
$$

作了这样的代换后,解数学模型II 就等价于解数学模型III和IV.用分离变量法和固有函数法可分别求得其解[4],最后得到水位恢复期典型井控制范围内地下水位的计算公式为

$$
\begin{aligned}
H(x,\mathrm{f}) = {} & h_0 + 4S_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}D_nJ_1(\lambda_n)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2 \mathrm{U}_0 t_0} + \frac{4\mathrm{k}_1}{\_}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{U}_0\lambda_n^4}D_nJ_1(\lambda_n)\left[1-\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\mathrm{U}_0 t_0}\right] - \\
& 2\pi S_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\mathrm{T}_i x)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda_n D_nJ_1(\lambda_n)Y_1(\lambda_n)}{(\mathrm{T}_i^2-\lambda_n^2)}\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\mathrm{U}_0 t_0}}{J_0(\mathrm{T}_i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{T}_i^2\mathrm{Uf}} - \\
& \frac{2\pi\mathrm{k}_1}{\_}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\mathrm{T}_i x)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{D_nJ_1(\lambda_n)Y_1(\lambda_n)}{\mathrm{U}_0\lambda_n(\mathrm{T}_i^2-\lambda_n^2)}\left[1-\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\mathrm{U}_0 t_0}\right]}{J_0(\mathrm{T}_i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{T}_i^2\mathrm{Uf}} + \frac{\mathrm{k}_2}{\_}\mathrm{f}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

式中,t_0为抽水延续时间(d); $\mathrm{U}_0 = \dfrac{KH_{p0}}{R_0^2\_}$; H_{p0}为抽水 t_0(d)时段末的平均含水层厚度(m);其余符号同(5)~(8)式。T_i由 $J_0(\mathrm{T}_i) = 0$确定。

从以上数学模型I、II 的求解结果(9)、(13)、(23)式可以看出,该模型不仅包括了降水入渗因子,而且还包括了影响灌区地下水动态的可控因子—— 灌溉和开采(涉及到具体灌溉制度和地下水开采方案)。因此,在改变影响灌区地下水动态可控因子的条件下,利用该模型便可以对地下水动态进行调控计算。

4 结　语

基于隔离井法的思想,通过对灌区灌排典型井工作特征和补给特征的分析,分开采期和水位恢复期建立并求解了地下水动态调控的数学模型。若把开采-水位恢复看作是一个连续,互馈的动态过程,利用该模型便可实现灌区地下水动态的调控计算。建立模型的目的是为了实际应用,而一个模型能否用于解决实际问题,必须经过实践检验。模型在陕西渭北黄土原灌区的应用实例表明[5],该模型对于灌区地下水位和开采量的调控计算具有较高的可靠性和良好的有效性。由此可见,本文建立与求解的灌区地下水动态调控的数学模型具有一定的实用价值。

参　考　文　献

1 魏晓妹.地下水在灌区“四水”转化中的作用.干旱地区农业研究, 1993(3): 54~ 57
2 李佩成著.地下水非稳定渗流解析法.北京: 科学出版社, 1990
3 南京工学院编.数学物理方程与特殊函数.北京: 人民教育出版社, 1978

4 魏晓妹.黄土原灌区地下水动态机理及其调控模型的研究〔博士论文〕.陕西杨凌: 西北农业大学水建学院, 1996
5 魏晓妹.灌区地下水位动态调控模型及其应用.灌溉排水, 1998(4): 1~ 5

Establishing and Solving the Mathematic Model for Adjusting and Controlling Groundwater Dynamic Regime in Irrigation District

Wei Xiaomei[1] **Li Peicheng**[2]
(1 *College of Water Conservancy and Architectural Engineering, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi* 712100)
(2 *Department of Hydrogeology and Engineering Geology, Xi'an Engineering College, Xian, Shaanxi* 710054)

Abstract With the consideration of the synthetical effect of precipitation, irrigation and exploitation on groundwater dynamic regime in irrigation district, based on the thought of the separation well method, this paper, according to the intermittent characterstic of pumping water in irrigation district, has established and solved the corresponding mathematic model for adjusting and controlling groundwater dynamic regime with taking the period of pumping water and recovering water table as one calculating period, and also taking each calculating period for a dynamic process of continuation and feedback each other, we can realize adjusting and controlling calculation for groundwater dynamic regime of irrigation district with the use of this model.

Key words irrigation district, groundwater dynamic regime, mathematic model