

黄土高原降雨雨滴最终速度的分布律

钱允祺 陶士珩

(西北农业大学基础科学系,陕西杨凌 712100)

摘 要 用幂函数分析了雨滴最终速度与雨滴直径之间的关系,并从贝斯特的雨滴直径分布函数出发导出了雨滴最终速度分布函数。分析表明,当雨强较小时,雨滴最终速度服从韦伯分布;当雨强很大时,则服从截断的韦伯分布。最后,讨论了雨滴最终速度分布的尺度参数和形状参数,两者均取决于降雨强度和降雨类型。

关键词 雨滴终速,韦伯分布,黄土高原

分类号 S152.42

受季风气候控制,黄土高原的降水季节主要集中在夏季,暴雨或高强度阵性降水发生频率较高,易造成大量水土流失。雨滴速度、雨滴动能等指标在黄土高原坡耕地的土壤侵蚀研究中倍受关注。周佩华等用幂函数拟合了雨滴动能与降雨强度的关系^[1];江忠善等综合了不同测点的多次实测资料,得出了黄土高原各地雨滴动能与降雨强度的拟合公式,发现直线拟合和幂函数拟合的效果都很好^[2]。然而在研究风速对降雨雨滴动能的影响时,除了需要知道降雨总能量和降雨强度的关系外,还需了解不同降雨强度下,雨滴最终速度的分布情况,因为它直接决定了雨滴动能的分布。本文根据贝斯特提出的雨滴直径的分布函数^[3],导出了符合黄土高原实际的雨滴速度分布函数和分布密度。

1 雨滴直径的分布律

1.1 雨滴直径的分布函数

贝斯特曾用下式来描述雨滴直径的分布^[3],其形式为:

$$F(d) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{a}\right)^n\right) \quad (1)$$

式中 d — 雨滴直径 (mm);

$F(d)$ — d 的体积分布函数;

a — 参数, $a = rI^p$, 其中 κ p 为常数;

I — 降雨强度 ($\text{mm} \cdot \text{min}^{-1}$);

n — 与雨型、降雨强度有关的参数。

(1)式表明,当雨型和降雨强度一定时,雨滴直径服从参数为 a, n 的韦伯 (weibull) 分布,其中 a, n 分别为韦伯分布的尺度参数和形状参数^[4]。雨滴直径的均值和方差分别为:

$$E(d) = a\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

$$D(d) = a^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \right) \quad (3)$$

1.2 雨滴直径分布的参数

江忠善等由黄土高原的实测资料拟合贝斯特的雨滴直径分布函数,得到黄土高原不同降雨雨型下的参数值如下^[2]:

$$\begin{cases} \text{对于短阵性降雨雨型有} \\ \quad \begin{cases} a = 3.58I^{0.25} \\ n = 2.44I^{-0.06} \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \text{对于普通降雨雨型有} \\ \quad \begin{cases} a = 2.96I^{0.26} \\ n = 2.54I^{-0.09} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

将 (4) (5) 式分别代入 (2) 式, 可得黄土高原不同降雨强度和不同雨型下的雨滴直径的均值, 结果见表 1.

表 1 黄土高原降雨雨滴直径的平均值

mm

雨型	$I / (\text{mm} \cdot \text{min}^{-1})$									
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	1.8	2.0	2.5
短阵型	1.0	1.5	1.8	2.2	2.7	3.2	3.5	3.7	3.8	4.0
普通型	0.8	1.2	1.4	1.7	2.2	2.6	2.9	3.1	3.2	3.3

表 1 中的数值与文献 [2] 表 3 中的经验公式计算值吻合很好, 说明韦伯分布能很好地描述雨滴直径的分布.

1.3 雨滴直径的分布密度

对 (1) 式求导, 可得雨滴直径的分布密度函数为:

$$f(d) = \frac{n}{a} \left(\frac{d}{a}\right)^{n-1} \exp\left(-\left(\frac{d}{a}\right)^n\right) \quad (6)$$

将 (4) (5) 式代入 (6) 式, 可得黄土高原不同雨型和不同降雨强度下的雨滴直径分布密度, 结果见图 1 和图 2.

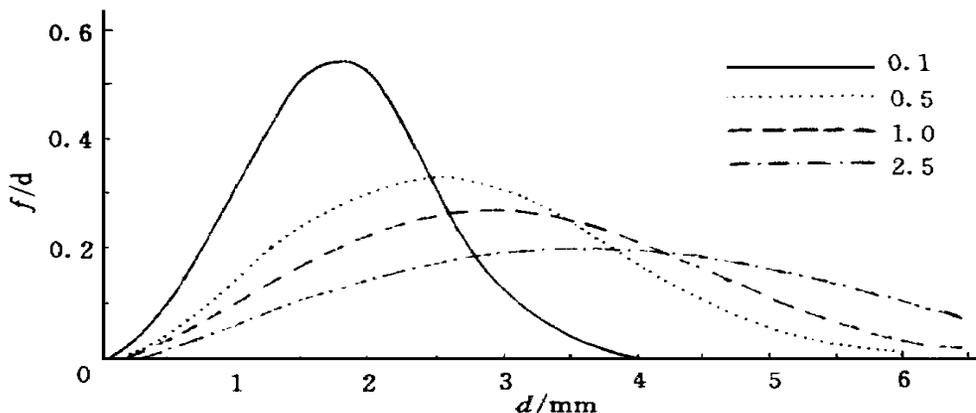


图 1 短阵性降雨雨型不同降雨强度 $I / (\text{mm} \cdot \text{min}^{-1})$ 的雨滴直径分布密度

1.4 雨滴直径众数

雨滴直径众数 d_{\max} 即雨滴直径分布密度函数取极大值的雨滴直径.

即

$$\begin{cases} f'(d_{\max}) = 0 \\ \Rightarrow d_{\max} = a\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases} \quad (7)$$

由图 1 及图 2 知,随着降雨强度增大, d_{\max} 随之增大;相同降雨强度下,短阵性降雨雨型的 d_{\max} 值要大于普通降雨雨型的 d_{\max} 值。

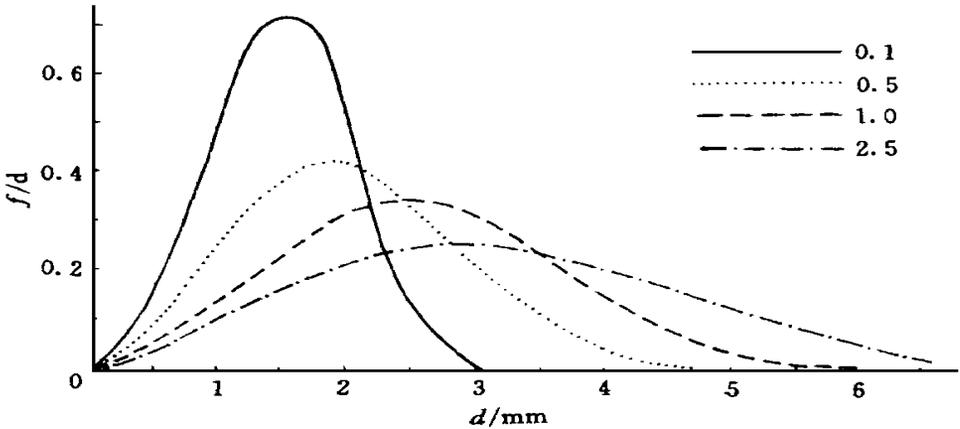


图 2 普通降雨雨型不同降雨强度 $I / (\text{mm} \cdot \text{min}^{-1})$ 的雨滴直径分布密度

2 雨滴最终速度的分布律

不同直径的雨滴具有不同的最终速度,因此雨滴直径的分布就决定了雨滴最终速度的分布。

2.1 雨滴最终速度计算公式的选择

文献 [5] 给出了不同直径雨滴的最终速度实测值与计算公式,二者吻合极好。但由于计算公式是按滞流区、介流区和紊流区分别给出并实施了雨滴变形速度系数订正,故很难用来求算雨滴速度的分布规律。因此我们用幂函数拟合文献 [5] 的实测资料,得雨滴速度与雨滴直径的关系为:

$$v = cd^b = 3.79d^{0.60} \quad (8)$$

式中 v ——雨滴最终速度 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$);

d ——雨滴直径 (mm)。

除直径很小的雨滴 ($d \leq 1.0 \text{ mm}$) 外, (8) 式的拟合精度较高。直径很小的雨滴,其速度和动能均很小,加之 $d < 1.0 \text{ mm}$ 的雨滴占总雨滴的体积比也很小 (见图 1, 图 2), 故这样的拟合造成的误差对雨滴速度分布和雨滴动能分布的影响甚微。

2.2 雨滴速度的分布函数与分布密度

由 (6) 式可导出雨滴最终速度的分布函数为:

$$\begin{aligned} F(v) &= P(a < v) \\ &= P(cd^b < v) \\ &= P(0 \leq d < \left(\frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{b}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{(\frac{v}{c})^{\frac{1}{b}}} \frac{n}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^n\right) dt \\
 &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{v}{a^b c}\right)^{\frac{n}{b}}\right) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{v}{A_1}\right)^{B_1}\right) \tag{9}
 \end{aligned}$$

由于大于 6.5 mm 的雨滴直径通常是不存在的^[5],因此通常存在雨滴速度上界 v_{\max} . 由文献 [5] 推荐的雨滴速度计算公式,可求出当 $d=6.5$ mm 时,相应的 $v_{\max}=9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.雨滴速度上界值的存在,在一定程度上会影响雨滴速度的分布形式.

对 (9) 式求导,可得雨滴最终速度的分布密度函数为:

$$f(v) = \frac{B_1}{A_1} \left(\frac{v}{A_1}\right)^{B_1-1} \exp\left(-\left(\frac{v}{A_1}\right)^{B_1}\right) \tag{10}$$

(9), (10) 两式表明,雨滴最终速度仍服从韦伯分布,其尺度参数为 $A_1=c \cdot a^b$,形状参数为 $B_1=n \cdot b$.雨滴速度的均值为:

$$E(v) = ca^b \Gamma\left(1 + \frac{b}{n}\right) \tag{11}$$

雨滴速度的方差为:

$$D(v) = c^2 a^{2b} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2b}{n}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{b}{n}\right)\right)^2\right) \tag{12}$$

由 (11) 式可求出不同雨强和雨型下的雨滴最终速度的均值,结果见表 2.

表 2 黄土高原雨滴最终速度的均值 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

降雨雨型	$I / (\text{mm} \cdot \text{min}^{-1})$										
	0.1	0.2	0.5	0.8	1.0	1.5	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0
短阵型	5.2	5.8	6.6	7.1	7.3	7.8	8.0	8.1	8.3	8.6	8.9
普通型	4.6	5.1	5.8	6.3	6.5	6.9	7.1	7.2	7.5	7.7	8.0

不同雨强和雨型下的雨滴最终速度分布密度见图 3.

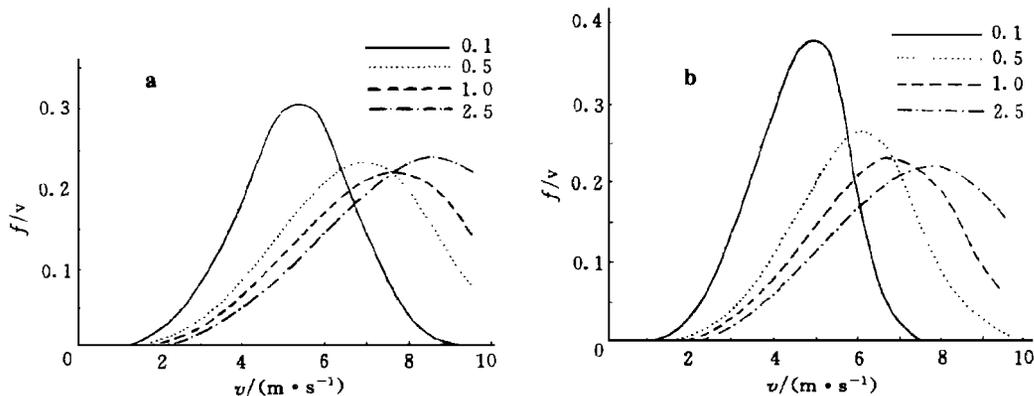


图 3 不同降雨强度 $I / (\text{mm} \cdot \text{min}^{-1})$ 的雨滴速度分布密度

a. 短阵型降雨雨型; b. 普通降雨雨型

3 讨 论

研究表明,韦伯分布可很好地描述雨滴直径的分布,亦能很好地描述降雨强度较小时雨滴速度的分布。但由于通常并不存在直径大于 6.5 mm 的雨滴,故当降雨强度较大而导致大雨滴数量较多时,雨滴速度则呈现截断的韦伯分布(参见图 3)。这样,对高强度阵性降水及暴雨而言,(10)式的精度将受到一定影响,这主要体现在用(11)式会过大估计雨滴速度的均值。根据本文得出的雨滴最终速度分布律,可进一步导出雨滴动能的分布律,并可通过对雨滴动能分布密度函数进行积分而得到单位面积的降雨功率。从而最终验证用韦伯分布描述雨滴速度和雨滴动能分布的真实精度。但因这涉及到雨滴速度及动能分布截断误差的估计和修正,需进一步研究。

参 考 文 献

- 1 周佩华,豆葆璋,孙清芳,等.降雨能量的试验研究初报.水土保持通报,1981(1): 51~ 60
- 2 江忠善,宋文经,李秀英.黄土地区天然降雨雨滴特性研究.中国水土保持,1983(3): 32~ 36
- 3 Best A C. The size distribution of raindrops. Quarterly Journal of the Royal meteorological, 1950, 76(16): 16~ 36
- 4 么枕生,丁裕国编著.气候统计.北京:气象出版社,1990
- 5 牟金泽.雨滴速度计算公式.中国水土保持,1983(3): 40~ 41

Distribution of Raindrop's Terminal Velocity in the Loess Plateau

Qian Yunqi Tao Shiheng

(Department of Basic Sciences, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi 712100)

Abstract A power function is employed, in this paper, to describe the relations between raindrop's terminal velocity and its diameter. Based on the raindrop diameter distribution by A. C. Best, the distribution of raindrop's terminal velocity is, therefore, obtained. It is indicated that the raindrop's terminal velocity obeys Weibull distribution or truncated Weibull distribution when the rainfall intensity is lower or higher, respectively. The scale and shape parameters are discussed, both of which depend on the intensity and type of rainfall.

Key words raindrop's terminal velocity, Weibull distribution, Loess Plateau