92-96

第25卷 第4期
1997年8月
西北农业大学学报
Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalis
Vol. 25 No. 4
Aug. 1997

18

关于刘徽的割圆术

王乃信　　王树林
(西北农业大学基础科学系,陕西杨陵 712100)　(西安矿业学院基础课部,西安 710054)

摘　要　分析了刘徽割圆术的思想和算法,指出其创造性和局限性,给刘徽割圆术以恰当的历史地位,并用数值分析的方法对刘徽的表述给予合理的解释.

关键词　九章算术,刘徽,割圆术,圆周率
中图分类号　O112

《隋书·律历志》说:"魏陈留王景元四年(即公元263年)刘徽注九章."这里所说的刘徽是中国魏晋时代著名的数学家.他在为《九章算术》所作的注中独立地、完整地、创造性地提出了割圆术,并获得了当时世界上最精确的圆周率的值.本文对刘徽割圆术的思想和算法加以客观分析,旨在恰当地解释和评价这一中国数学史上的重要篇章.

1　刘徽割圆术的内容

刘徽的割圆术,是刘徽在为《九章算术》第一卷方田中的圆田术所作的注中提出来的[1],包括如下内容:

1)刘徽首先解释了圆田术求圆面积的方法,然后指出"周三径一"是不对的,他说:以半周乘半径而为圆幂,"此以周径谓至然之数,非周三径一之率也.周三者,从其六觚之环耳,以推圆规多少之较,乃弓之与弦也."

2)刘徽提出用割圆内接正六边形为正十二边形等步骤,使圆内接正多边形的面积逐次逼近圆的面积.进而又指出:"割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无失矣.觚面之外,又有余径.以面乘余径则幂出弧表.若夫觚之细者,与圆合体,则表无余径.表无余径,则幂不外出矣."

3)刘徽详述了割圆的算法,例如,关于割圆内接正六边形为正十二边形,他说:"令半径一尺为弦,半面五寸为勾,为之求股.以勾幂二十五寸减弦幂,余七十五寸,开方除之,下至秒忽,又一退法求其微数,微数无名者以为分子,以下为分母,约为五分忽之二,故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二.以减半径,余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三,谓之小股,为之求弦,其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽,余分弃之,开方除之,即十二觚之一面也."

4)刘徽在计算了圆内接正一百九十二边形的面积后,对圆面积进行了大胆推断,从而获得了当时世界上最精确的圆周率的值.他说:"差幂六百二十五分寸之一百五,以十二觚之幂为率消息,当取此分寸之三十六以增于一百九十二觚之幂(即三百一十四寸六百二十五分寸之六十四),以为圆幂三百一十四寸二十五分寸之四."

收稿日期　1997-01-27
作者简介　王乃信,男,1942年生,教授

5)刘徽验证了自己获得的结果的正确性，为此，他继续用割圆术，直到求出圆内接正三千零七十二边形的面积. 他说："当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳."

2 刘徽割圆术的历史地位

2.1 古希腊已有割圆思想[2]

古希腊巧辩学派的学者 Antiphon(约公元前五世纪)提出用边数不断增加的圆内接正多边形来接近圆，并提出把圆看作是无穷多边的正多边形；另一个古希腊巧辩学派的学者 Bryson(约公元前五世纪)类似地提出用边数不断增加的圆外切正多边形来接近圆；而古希腊的一位大数学家 Eudoxus(约公元前四世纪)则依据这一思想创立了穷竭法这种著名的获取定理和证明定理的方法.

虽然刘徽不是人类历史上第一个提出割圆思想的人，但是，他没有简单地重复任何人，而是独立地、完整地、创造性地提出了割圆术，和古希腊的数学家们一样，刘徽的思想同样是辉煌的.

2.2 刘徽用割圆术获得了当时世界上最精确的圆周率值

古希腊的 Antiphon，Bryson，Eudoxus 虽然先于刘徽提出割圆思想，但他们都没有用它去求圆周率的值. 然而，Archimedes[3](公元前 287～公元前 212 年)继承了割圆思想，并根据圆周长大于圆内接正多边形周长而小于圆外切正多边形周长，得到圆周率 π 满足 $223/71 < \pi < 22/7$ 的结果. 古希腊的 Ptolemy[2](公元？～168 年)并没有专门研究圆周率的值，他依据他的定理(Ptolemy 定理)提出一种特殊的割圆技巧，求出了各圆心角所对的弦长的六十进制数值，其中 1/2 度圆心角所对弦长的数值为 $31'25''$，相当于求得 π 的值为 $\pi\approx377/120$. 这是刘徽以前有据可考的圆周率的最好结果.

我国古代很早就知道"周三径一"误差很大，需要改进，不少人在这方面作过工作[4]：汉代的刘歆(约公元前 50～公元 23 年)所用圆周率的值为 $\pi\approx3.1547$；汉代的张衡(公元 78～139 年)所用圆周率的值为 $\pi\approx3.1623$；三国的王蕃(公元 219～257 年)所用圆周率的值为 $\pi\approx3.1556$. 这些 π 的近似值都不如 Archimedes 和 Ptolemy 的结果好，并且都未提供出正确的算法，缺乏理论根据.

而刘徽根据他所提出的割圆术，运用勾股定理，设计出一个完整的求圆周率 π 近似值的算法.

设 $n=6$ (术曰：割六觚以为十二觚)，又设 $r=1$，则有 $s=1$(术曰：置圆径二尺，半之为一尺，即六觚之面也)，算法步骤如下：

①设弦为 r，勾为 $s/2$，求股，赋予 a(此为小股，术曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股)；

②将 $r-a$ 赋予 b(此为余径，术曰：觚面之外，又有余径，又曰：以减半径，谓之小股)；

③设勾仍为 $s/2$，股为 b，求弦，赋予 s(实为圆内接正 $2n$ 边形的边长，术曰：为之求小弦，即十二($2n$)觚之一面也)；

④求 $S_n=n\cdot s$ 圆周率的近似值(实为圆内接正 $2n$ 边形的半周长，亦为圆内接正 $4n$ 边形的面积，术曰：得二十四($4n$)觚之幂)；

⑤将 $2n$ 赋予向 ①.

上述算法为计算出更精确的圆周率值奠定了基础. 刘徽所获得的"圆幂三百一十四寸二十五分寸之四",即 $\pi\approx3.1416$,这是当时世界上最精确的圆周率的值.

顺便指出,祖冲之[5](公元429～500年)研究过刘徽的割圆术,再加上自己的创造,他获得了当时世界上最精确的圆周率的值:$3.1415926<\pi<3.1415927$. 此外,他还用最佳近似分数给出所谓疏率和密率:$\pi\approx22/7$,这一结果与 Archimedes[3]的上限结果相同;$\pi\approx355/113$,这一结果在西方迟至1573年才由 Otho 重新获得[3].

2.3 在中国刘徽首次比较准确地描述了极限概念

在中国战国时代的著作《庄子》中记录了名家惠施的话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."这段话已经有了极限思想的雏形[5]. 但名家所表现出的极限思想是不自觉的、模糊的. 名家的目的仅仅是为了在辩论中强调名词概念的相对性,因而不可能形成数学上的清晰的极限概念.

但是,刘徽在割圆术中比较准确地描述了极限概念. 他说:"割之弥细,所失弥少. 割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无失矣."这明确地肯定了 $\lim S_n=\pi$. 这里 S_n 是圆内接正 $2n$ 边形的半周长,亦为圆内接正 $4n$ 边形的面积.

他又说:"觚面之外,又有余径. 以面乘余径则幂出弧表."这表明刘徽实际上建立了不等式 $S_{2n}<\pi<S_{2n}+e_n$,其中 $e_n=S_{2n}-S_n$,此即刘徽所说的"差幂". 刘徽的这一不等式明显地优于 Archimedes 的不等式,这是因为:第一,Archimedes 既要用到圆内接正多边形,也要用到圆外切正多边形,而刘徽用"差幂",只需要用圆内接正多边形,可以减少大约一半运算次数;第二,由于 S_{2n} 等于圆内接正 $4n$ 边形的半周长,并且容易证明,$S_{2n}+e_n$ 小于圆外切正 $4n$ 边形的半周长,因而,刘徽的这一不等式比 Archimedes 的不等式更精确. 刘徽显然和 Archimedes 一样,已经意识到这里存在类似夹逼定理这样的极限性质,由此既可以推断极限的存在,还可以确定极限值各数位上的准确的有效数字. 刘徽正是这样做的,他用圆内接正一千五百三十六边形和圆内接正三千零七十二边形的面积,依据他的不等式,验证了他的结果直到第四位小数都是正确的.

刘徽接着说:"觚之细者,与圆合体,则表无余径,表无余径,则幂不外出矣."他正是根据这一点,解释了圆田术求圆面积的方法(半周半径相乘得积步). 刘徽的解释方法,与 Eudoxus 证明圆面积之比等于半径平方比的穷竭法如出一辙[2].

2.4 刘徽的割圆术很可能进行了真正的极限运算,并意识到外推方法

既然刘徽肯定了 $\lim S_n=\pi$,当然刘徽一定十分注意 S_n 的变化规律,以便把握住 π 的值. 根据刘徽的运算,S_n 的变化如下:

$n=3$, $S_n=3$, $e_n=S_{2n}-S_n=0.105828$, $p_n=e_n/e_{2n}=3.9494$,

$n=6$, $S_n=3.105828$, $e_n=S_{2n}-S_n=0.026796$, $p_n=e_n/e_{2n}=3.9875$,

$n=12$, $S_n=3.132624$, $e_n=S_{2n}-S_n=0.006720$, $p_n=e_n/e_{2n}=4.0000$,

$n=24$, $S_n=3.139344$, $e_n=S_{2n}-S_n=0.001680$,

$n=48$, $S_n=3.141024$.

刘徽有时用分数. 例如0.001680刘徽记为105/62500. 从上述变化可以看出,在割圆的过程中,e_n 的变化量基本上是按等比规律递缩的. 设前后两项之比为 p,则

$$\pi \approx S_{2n} + e_n(1/p + 1/p^2 + 1/p^3 + \cdots) = S_{2n} + e_n/(p-1).$$

按照刘徽在注中所表现的运算能力和精明,他很可能在计算中悟到或猜到这一结果.刘徽说:"差幂六百二十五分寸之一百五,以十二觚之幂为率消息,当取此分寸之三十六以增于一百九十二觚之幂,以为圆幂三百一十四寸二十五分寸之四."其中"以十二觚之幂为率消息"的意思至今未明.作者认为这句话是说:应该依据圆内接正十二边形的面积所提供的信息来修正和推断.而圆内接正十二边形的面积所提供的 p 值为 3.9494,

$$e_n/(p-1) = 105/62500/(3.9494-1) \approx 36/62500 = 0.000576,$$

$$\pi \approx S_{2n} + e_n/(p-1) \approx 3.141024 + 0.000576 = 3.1416.$$

很可能刘徽就是这样运用了真正的极限运算获得这一著名结果的.

在现代的数值分析中,有一种利用低精度公式获得高精度结果的外推方法,也称 Romberg 方法[6].这种方法是严格建立在误差分析理论基础之上的.这种方法常用于类似于割圆这类逐次分半的算法中,其基本公式为:

$$Q \approx Q_{2n} + (Q_{2n} - Q_n)/(p-1),$$

其中 p 取决于误差估计式.例如:在数值积分中,梯形法的 p 值为 4,Simpson 法的 p 值为 16,Cotes 法的 p 值为 64 等.刘徽的算式也为

$$\pi \approx S_{2n} + (S_{2n} - S_n)/(p-1),$$

其中 p 近似地等于 4,而 4 正是二阶逼近方法外推时常取的 p 值.根据 S_n 的误差估计式,有 $\pi - S_n = O(1/n^2)$,由此可知,刘徽的割圆过程也是一种二阶逼近方法.而刘徽的方法又恰好非常近似于二阶逼近方法的外推.因此,可以设想,刘徽有可能意识到外推这种类型的方法.

3　刘徽割圆术的局限性

3.1　刘徽的极限概念是不彻底的

刘徽的割圆术虽然比较准确地描述了极限概念,而且,很可能进行了真正的极限运算,但刘徽的数学素养还不足以完整地描述这个无限的趋向过程.他采用了"割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无失矣","觚之细者,与圆合体,则表无余径"等绝对的、不准确的言词.实际上,刘徽的思想陷入了矛盾之中,一方面,他像惠施那样意识到割圆的过程是无限的,是万世不竭的,另一方面,他又竭力回避无限,不愿意正视无限,相信总有"不可割","表无余径","幂不外出","与圆周合体而无失"之时.这就足以说明刘徽的极限概念是不彻底的.事实上,我国古代还有不少学者虽具有极限思想的雏形,但在描述中都毫无例外地不得不采用绝对的、不准确的言词.极限概念的不彻底,限制了刘徽对极限概念的挖掘和应用,也限制了刘徽在数学上的创造性.纵观刘徽在数学上的工作可以看出,虽然他在圆周率的计算等方面取得了令世人瞩目的成果,但是,刘徽在整个数学史上的地位,则不可能超过 Archimedes 等人.

3.2　刘徽的十进制是不完全的

刘徽在割圆计算中采用了十进制.但他受长度单位尺、寸、分、厘、毫、秒、忽的限制,边长的计算只精确到忽,相当于尺数只取到第六位小数.这直接影响计算的精确性.例如:割四十八觚以为九十六觚时,"得小弦六分五厘四毫三秒八忽,余分弃之,即九十六觚之一

面."此即尺数为 0.065438．这里所有的有效数字直到第六位小数都是准确的.但是由于仅取到忽，致使以下的计算产生了较大的误差:"以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽."这里的忽指平方忽，百万忽指平方厘.这相当于面积的平方尺数也取到第六位小数，即 3.141024.计算是正确的.但注意到计算中把 0.065438 的舍入误差扩大为原来的 48 倍，因而 3.141024 从第五位小数起已经不可靠了.事实上，精确到第六位小数的平方尺数应为 3.141032.而要达到这样的精确度，长度单位取到忽是远远不够的.这说明刘徽还不能冲破老的长度单位的限制，自如地应用十进制获得各有效数字都准确的结果.因而，刘徽的十进制是不完全的.除了十进制数外，刘徽也用分数，但由于刘徽不会用最佳近似分数，又缺乏足够的误差意识，因而尚不能弥补他在十进制计算中所造成的误差.

参考文献

1 刘徽注.九章算术.上海:上海古籍出版社，1990
2 Morris Kline 著;张理京，张锦炎译.古今数学思想.上海:上海科学技术出版社，1979
3 Howard Eves. An Introduction to the History of Mathematics. New York:Saunders College Publishing，1983
4 李 俨.中算史论丛.北京:中国科学院出版，1954
5 钱宝琮.中国数学史.北京:科学出版社，1981
6 邓建中，葛仁杰，程正兴.计算方法.西安:西安交通大学出版社，1985

On Liu Hui's Mothod of Dividing Circles

Wang Naixin[1] **Wang Shulin**[2]

(1 *Department of Basic Science, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi* 712100)

(2 *Department of Basic Courses, Xi'an Mining Institute, Xi'an, Shaanxi* 710054)

Abstract Liu Hui's creativity and limitation are pointed out and his proper historical position is designated in this paper by analyzing his thought and algorithm of circle-dividing method. His expression is properly interpreted with the method of numerical analysis as well.

Key words Arithmetics in Nine Sections, Liu Hui, method of circle-dividing