

约束选择指数的通径分析化模型

周静芋¹ 孙世铎² 宋世德¹ 袁志发¹

(1 西北农业大学基础科学系, 2 陕西省农业科学院畜牧所, 陕西杨陵 712100)

摘 要 建立了在各种约束条件下的综合选择指数(无约束、约束和最宜3种选择)的通径分析化模型。该模型可以分析出选择指数中任一性状 x_i 对由它而使聚合遗传经济值 H 的相关进展 $CGS_{H,i}$ 的直接贡献 a_i 和 x_i 通过 x_j 对 $CGS_{H,i}$ 的间接进展 $r_{ij}a_j$, 给出 x_i 与 H 之间的全部路径信息, 以确定主选性状、辅助性状和限制性状。结果表明, 好的选择指数应由生物和经济的双重意义来确定。约束选择指数在育种上改变了经济权重的无约束选择, 经济权重的改变是由约束条件引起的。

关键词 约束选择指数, 通径分析, 经济权重, 无约束选择指数

中图分类号 Q-332

1943年 Hazel L H 提出选择指数, Kempthorne 等(1959)提出了约束选择指数, Tallis(1962)提出了最宜选择指数, Resek 等(1969)提出了理想选择指数。一些研究表明, 选择指数若不加约束, 效果往往不佳^[1]。为了更好地制定选择指数和分析各个性状在选择中的作用, 文献[2, 3]中论述了选择指数的通径分析化方法, 把无约束选择指数的制定与通径分析有效地结合起来, 形成一种新的统计学方法。本文将建立适合上述四种选择指数的通径分析化模型, 并通过应用实例的分析, 说明该模型在育种上的意义。

1 约束选择指数与其通径分析化模型

设 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T \sim N_m(\mu, \Sigma_x)$; $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}^T \sim N_m(\mu, \Sigma_g)$; $e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}^T \sim N_m(0, \Sigma_e)$, $x = g + e$, g 与 e 独立, 则 $\Sigma_x = \Sigma_g + \Sigma_e$, x 为构造选择指数的 m 个性状所组成的随机列向量; g 与 e 分别为 x 的育种值和环境离差向量; Σ_g, Σ_e 与 Σ_x 分别为 x 的表型、遗传和环境协方差阵, 且都正定。

设约束选择指数为

$$I = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m = b^Tx \quad (1)$$

x 的聚合遗传型值为

$$H = w_1g_1 + w_2g_2 + \dots + w_mg_m = w^Tg \quad (2)$$

式中: $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 为已知的经济权重向量, 而 $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 为待估计的选择指数的权重向量。育种的目的是希望 r_{IH} 在一定条件下达到最大。故约束选择指数的数学模型就是一个条件极值问题:

$$\begin{cases} r_{IH} = \max \\ b^T \Sigma_g C = (l_1, l_2, \dots, l_r) = l^T \\ b^T \Sigma_x b = 1 \\ w^T \Sigma_g w = 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中: C 为 $m \times r$ 阶约束矩阵, 假若在选择中我们要对 m 个性状的前 r 个性状进行约束, 则 C 矩阵由上为 $r \times r$ 阶单位阵, 下为 $(m-r) \times r$ 阶零矩阵所构成。 l 为 r 维列向量, 它规定了被约束的 r 个性状按怎样的比例变化, 当达到 l 规定的水平以后就不再变化。

令目标函数

$$f = b^T \Sigma_x w - \frac{\nu}{2} (b^T \Sigma_p b - 1) - (b^T \Sigma_x C - C^T) \lambda$$

式中: ν, λ 分别为拉格朗日乘数法的系数和列向量。

由多元函数的极值原理得正则方程组

$$\Sigma_p w - \nu \Sigma_p b - \Sigma_x C \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma_p b = \Sigma_x (w - C \lambda) \quad (4)$$

如果 Σ_p 可逆, 则

$$b = \Sigma_p^{-1} \Sigma_x (w - C \lambda) \quad (5)$$

其中

$$\lambda = (C^T \Sigma_x \Sigma_p^{-1} \Sigma_x C)^{-1} C^T \Sigma_x \Sigma_p^{-1} \Sigma_x w \quad (6)$$

令 $w' = w - C \lambda$, 称其为由于有了约束而改变了的经济权重, 也即由于有了约束, 使实际的经济权重有了增减。其中 λ 的生物学意义就是由于有了约束而产生的被约束性状经济权重的改变量。

令 $a_j = k \sqrt{\sigma_{pjj}} b_j$, 并对方程组(4)的第 j 个方程两边同除以 $\sqrt{\sigma_{pjj}}$ ($j=1, 2, \dots, m$), 则方程组(4)变为

$$\begin{cases} a_1 + r_{p12} a_2 + \dots + r_{p1m} a_m = w'_1 CGS_1 + w'_2 CGS_{2(1)} + \dots + w'_m CGS_{m(1)} \\ r_{p21} a_1 + a_2 + \dots + r_{p2m} a_m = w'_1 CGS_{1(2)} + w'_2 CGS_2 + \dots + w'_m CGS_{m(2)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{pm1} a_1 + r_{pm2} a_2 + \dots + r_{pm m} a_m = w'_1 CGS_{m(1)} + w'_2 CGS_{m(2)} + \dots + w'_m CGS_m \end{cases} \quad (7)$$

其中 K 为选择强度, $CGS_{1(j)}$ 为由 x_j 的选择而使 x_1 获得的相关遗传进展, $CGS_{H(j)}$ 为由于对 x_j 的选择而使 H 获得的相关遗传进展, 则

$$CGS_{H(j)} = w'_1 CGS_{1(j)} + w'_2 CGS_{2(j)} + \dots + w'_m CGS_{m(j)} \quad (8)$$

设 x 的表型相关阵为 $R_p = (r_{ij})_{m \times m}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$,

$$\text{而} \quad CGS_H = (CGS_{H(1)}, CGS_{H(2)}, \dots, CGS_{H(m)})^T \quad (9)$$

则方程组可写为

$$R_p a = CGS_H \quad (10)$$

式(7)和(10)描述了约束选择指数的相关遗传进展分解原理, 即约束选择指数的通径分析化模型。该原理指出: 由于对 x_j 的选择, 使 H 获得的总进展为 $CGS_{H(j)}$, 它可分解为 m 个组分, 其中 a_j 为 x_j 对 H 的直接贡献, 是由通径 $x_j \rightarrow H$ 实现的, 贡献率为 $a_j / CGS_{H(j)}$; $a_j r_{pj}$ 是 x_j 通过 x_i 对 H 的间接贡献, 是由通径 $x_j \leftrightarrow x_i \rightarrow H$ 实现的, 贡献率为 $a_j r_{pj} / CGS_{H(j)}$, 通径图如图1所示。

当 $r=0$ 时, 就是无约束选择; 当 $r \neq 0$, 而 $l=0$

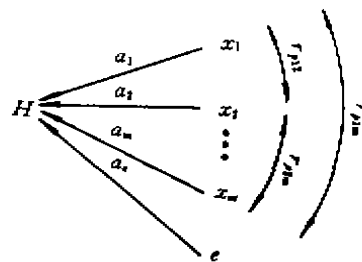


图1 约束选择指数的通径图

就是约束选择,当 $r \neq 0$, 且 $l \neq 0$ 就是最宜选择指数,因此该模型包含了无约束选择、约束选择和最宜选择。

2 有关参数的计算公式及其关系

1) a 与 b , Σ_p 与 R_p 的关系 $\sigma_p = \text{diag}\{\sqrt{\sigma_{p11}}, \sqrt{\sigma_{p22}}, \dots, \sqrt{\sigma_{pmm}}\}$,

则 $a = k\sigma_p b$, $b = \frac{1}{k}\sigma_p^{-1}a$, $\Sigma_p = \sigma_p R_p \sigma_p$, $R_p = \sigma_p^{-1} \Sigma_p \sigma_p^{-1}$

2) I 的表型方差 $\Sigma_p = b^T \Sigma_p b = \frac{1}{k^2} a^T R_p a$

3) I 对 H 的决定系数 $R_{IH}^2 = b^T \Sigma_p w / w^T \Sigma_p w = a^T R_p a / k^2 w^T \Sigma_p w$

4) H 的相关遗传进展(经济总进展)为

$$CGS_{H(t)} = k\sigma_{Ip} = \sqrt{a^T R_p a} = \sqrt{a^T CGS_H}$$

5) x_i 的相关遗传进展(生物学进展)为

$$(CGS_{1(t)}, CGS_{2(t)}, \dots, CGS_{m(t)})^T = k\Sigma_g b / \sigma_{Ip} = k\Sigma_g \sigma_p^{-1} a / \sqrt{a^T R_p a}$$

6) x_i 对 $CGS_{H(t)}$ 的贡献率(x_i 对 $CGS_{H(t)}$ 的直接贡献率)为

$$J_i = a_i / CGS_{H(t)} \quad (i=1, 2, \dots, m), x_i$$

通过 $x_j (j \neq i, j=1, 2, \dots, m)$ 对 $CGS_{H(t)}$ 的间接贡献率为

$$J_{ij} = a_j r_{pij} / CGS_{H(t)}$$

7) x_i 对 H 的经济贡献率

$$\eta_i = w_i CGS_{H(t)} / CGS_{H(t)} \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

3 应用举例及其分析

在鸡的选择中 Kempthorne 等人^[4]用 5 个性状制定了鸡的约束选择指数,其中 4 个是: x_1 —成年体重; x_2 —卵重; x_3 —初产日龄的天数; x_4 —至 72 周的产卵数的 1/3. 其表型协方差阵 Σ_p 、遗传协方差阵 Σ_g 分别为

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} 34 & 6.77504 & 0 & -2.19881 \\ 6.77504 & 21.6 & 0 & -1.75256 \\ 0 & 0 & 13 & -10.87709 \\ -2.1988 & -1.7526 & -10.87709 & 56.88 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_g = \begin{bmatrix} 15.30 & 3.85503 & 0 & 1.97825 \\ 3.85503 & 10.80 & 0 & 1.66260 \\ 0 & 0 & 5.20 & -3.84567 \\ 1.97825 & 1.66260 & -3.84567 & 11.376 \end{bmatrix}$$

表型相关阵 r_p 和遗传相关阵 r_g 可由 Σ_p 和 Σ_g 算出(略)。

各性状的遗传力分别为 $h_1^2=0.45$, $h_2^2=0.50$, $h_3^2=0.40$, $h_4^2=0.20$, 各性状的经济权重 $w = (-2.50, 7.20, 0, 10.80)^T$ 。

3.1 三种选择情况下的选择指数及其通径分析

第一,无约束选择指数及其通径分析。第二,对 x_1 和 x_3 进行约束(因其权重分别为负

和零)的约束选择指数及其通径分析。第三,对 x_2 进行约束(不希望增加卵重)的约束选择指数及其通径分析。三种情况分析结果见表1,其参数计算结果见表2。

表1 三种情况的通径分析

项目	通径组合	直接贡献	间接贡献	贡献率%	总贡献 $CGS_{H(1)}$
无约束	$x_1 \rightarrow H$	$a_1 = -2.304476$		-123.41	
	$x_1 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p12}a_2 = 4.974954$	266.43	
	$x_1 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p13}a_3 = 0$	0	
	$x_1 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p14}a_4 = -0.803209$	-43.02	1.867271
	$x_2 \rightarrow H$	$a_2 = 19.899814$		107.45	
	$x_2 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p21}a_1 = -0.576119$	-3.11	
	$x_2 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p23}a_3 = 0$	0	
	$x_2 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p24}a_4 = -0.803209$	-4.34	18.520480
	$x_3 \rightarrow H$	$a_3 = -5.093408$		44.22	
	$x_3 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p31}a_1 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p32}a_2 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p34}a_4 = -6.425675$	55.78	-11.519084
	$x_4 \rightarrow H$	$a_4 = 16.064187$		93.28	
	$x_4 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p41}a_1 = 0.115224$	0.57	
	$x_4 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p42}a_2 = -0.994991$	-5.78	
	$x_4 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p43}a_3 = 2.037363$	11.83	17.221769
对 x_1 和 x_3 约束	$x_1 \rightarrow H$	$a_1 = -7.728460$		212.48	
	$x_1 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p12}a_2 = 4.874289$	-134.01	
	$x_1 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p13}a_3 = 0$	0	
	$x_1 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p14}a_4 = -0.782958$	21.53	-3.637127
	$x_2 \rightarrow H$	$a_2 = 19.497155$		116.18	
	$x_2 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p21}a_1 = -1.932115$	-11.51	
	$x_2 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p23}a_3 = 0$	0	
	$x_2 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p24}a_4 = -0.782958$	-4.67	16.782074
	$x_3 \rightarrow H$	$a_3 = 5.536496$		-761.39	
	$x_3 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p31}a_1 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p32}a_2 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p34}a_4 = -6.263662$	861.39	-0.727158
	$x_4 \rightarrow H$	$a_4 = 15.659155$		121.80	
	$x_4 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p41}a_1 = 0.386423$	3.01	
	$x_4 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p42}a_2 = -0.974858$	-7.58	
	$x_4 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p43}a_3 = -2.214598$	-17.23	12.856120
对 x_2 约束	$x_2 \rightarrow H$	$a_1 = -3.193741$		82.10	
	$x_1 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p11}a_2 = -0.069921$	1.80	
	$x_1 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p13}a_3 = 0$	0	
	$x_1 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p14}a_4 = -0.525306$	15.10	-3.889886
	$x_1 \rightarrow H$	$a_2 = -0.279682$		16.41	
	$x_1 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p21}a_1 = -0.798435$	46.85	
	$x_2 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p22}a_2 = 0$	0	
	$x_2 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p23}a_3 = -0.626306$	36.77	-1.704366
	$x_2 \rightarrow H$	$a_3 = -6.508723$		56.50	
	$x_3 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p31}a_1 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p32}a_2 = 0$	0	
	$x_3 \leftrightarrow x_4 \rightarrow H$		$r_{p34}a_4 = -5.010447$	43.50	-11.519064
	$x_4 \rightarrow H$	$a_4 = 12.526117$		81.85	
	$x_4 \leftrightarrow x_1 \rightarrow H$		$r_{p41}a_1 = 0.159687$	1.04	
	$x_4 \leftrightarrow x_2 \rightarrow H$		$r_{p42}a_2 = 0.013984$	0.00	
	$x_4 \leftrightarrow x_3 \rightarrow H$		$r_{p43}a_3 = 2.603489$	17.01	15.303038

表 2 几个参数计算结果比较

	无约束	对 x_1 和 x_3 约束	对 x_2 约束
λ^T		(2.0967, -7.4828)	(8.7037)
w^T	(-2.5, 7.2, 0, 10.8) ^T	(-4.5967, 7.20, 7.4828, 10.8) ^T	(-2.50, -1.5037, 0, 10.80) ^T
b^T	(-0.395, 4.282, -1.413, 2.130)	(-1.325, 4.195, 1.536, 2.076)	(-0.55, -0.06, -1.80, 1.66)
R_{IH}^2	0.3505	0.2769	0.1399
$CGS_{H(i)}$	26.45t	23.51t	16.7t
$CGS_{(i)}$	(0.554, 1.825, -0.588, 1.361)	(0, 1.857, 0, 0.939)	(-0.3210, 0, -0.942, 1.473)
$\eta_i(\%)$	-5.24, 49.68, 0.55, 57	0, 56.87, 0, 43.12	4.7, 0, 0.95, 0.06

3.2 结果与分析

3.2.1 三种选择情况下各性状作用分析 由表 1 看出,在无约束的情况下,选择 x_3 的结果,无论是直接还是间接的都使 H 的进展为负值或为零,故 x_3 为第一限制性性状。选择 x_1 使 H 进展很小,虽然它通过 x_2 对 H 的进展不算小,但总的来讲, x_1 仍起到一定的限制作用。 x_2 对 H 进展的直接贡献很大,尽管它通过 x_3 的间接贡献为负,仍不失为一主选性状。 x_4 对 H 进展的直接贡献大,间接贡献很小,亦为主选性状。在限制 x_1 和 x_3 的情况下, x_1 对 H 进展的直接贡献为负,总的贡献亦为负,而 x_3 对 H 进展的直接贡献为正,总的贡献为接近零的负值,故 x_1 为主要限制性性状, x_3 为次要限制性性状。 x_2 和 x_4 为主选性状。在限制 x_2 的情况下, x_2 、 x_3 和 x_1 程度不同的变成限制性性状,唯独 x_4 成为主选性状。

由表 1 各种约束情况下的分析可以看出,本文所建立的各种选择指数的通径分析化模型,能方便地分析出各选择性状在使 H 进展中的作用。

3.2.2 三种选择情况下的效果分析 由表 2 看出,无约束选择指数和约束选择指数相比较,约束选择指数的 $CGS_{H(i)}$ 和 R_{IH}^2 在变小,这和前人的研究是一致的,也就是说,不宜约束过多的性状。值得提出的是,若约束的是限制性性状, $CGS_{H(i)}$ 和 R_{IH}^2 下降的幅度小,若约束的是主选性状,则 $CGS_{H(i)}$ 和 R_{IH}^2 下降的幅度大。因此,本文所给出的模型对于建立更好的约束选择指数是有帮助的。

3.2.3 约束与经济权重的关系 由表 2 看出,随着约束情况的不同,主选性状、限制性性状、 $CGS_{H(i)}$ 和 R_{IH}^2 在变化,这种改变的实质是权重由 w 变为 $(w - C\lambda)$,即由经济权重的调整来实现各种选择的。因而,好的约束选择指数应使各约束性状的权重有所增加或下降不大。

4 一些结论

1)建立了各种约束情况下的选择指数的通径分析化模型 $R_{iH} = CGS_{H(i)}$,它可以分析出 x_i 对 $CGS_{H(i)}$ 的直接贡献和它通过 x_j 对 $CGS_{H(i)}$ 的间接贡献,提供了各种选择指数与 H 之间的全部路径信息,以确定谁是主选性状,谁是限制性性状,从而更好地利用选择指数和制定更好的选择指数。

2)在各种约束情况下,选择指数的正则方程组为 $\Sigma_i b_i = \Sigma_i (w_i - C\lambda_i)$,拉格朗日常数向量 λ 各分量是对应的约束性状所引起的经济权重改变量,即无约束时,经济权重为 w ,约束时变为 $w - C\lambda$ 。从育种上讲,各种约束选择指数是调整了经济权重以后的无约束选择指数。

参 考 文 献

- 1 庞航译.约束选择指数.国外畜牧科技,1986(3):44
- 2 袁志发,常智杰,刘光祖.选择指数与相关遗传进展的分解原理.西北农业大学学报,1988,16(4):31~34
- 3 孙世铎,周静芋,袁志发.综合选择指数的通径分析化方法研究.黄牛杂志,1993,19(4):5~9
- 4 吴仲贤.统计遗传学.北京:科学出版社,1979,344~352

A Path Analytical Model of Restricted Selection Index

Zhou Jingyu¹ Sun Shiduo² Song Shide¹ Yuan Zhifa¹⁽¹⁾ Department of Basic Sciences, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100)⁽²⁾ Institute of Animal Science, Shaanxi Academy of Agricultural Sciences, Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract A path analytical model of comprehensive selection indexes (unrestricted, restricted, and optimum) was established under all the restricted conditions. The direct contribution value a_i of any traits x_i in the index to $CGS_{H(i)}$ of the aggregate genetic economic value H , and the indirect contribution value $r_{pij}a_i$ of x_i to $CGS_{H(i)}$ through x_j , can be obtained with the model. This indicates that the total path information between x_i and H can also be obtained, and the primary selection trait together with the auxiliary and restricted traits can, therefore, be determined. The study shows that a good index should be determined both with biological and economic significances. But the restricted selection index, in terms of breeding science, is a unrestricted selection one, of which the economic weight has been changed, whereas the change of the economic weight is caused by the restricted conditions.

Key words Restricted selection index, path analysis, economic weight, unrestricted selection index