

一种 r_m 计算公式的改进

刘光祖 史美英

(西北农业大学基础课部, 陕西杨陵 712100)

摘 要 提出了用回归分析法和试差法计算 r_m , 使 r_m 的计算精度有所提高。
关键词 回归分析法, 试差法, 中值定理
中图分类号 O212.1

1 现有的 r_m 算法

1.1 Leslie-Birch 算法

$$r_m = \frac{1}{T} \ln(\Sigma L_x m_x) \quad (1)$$

其中 $\Sigma L_x m_x$ 为每世代种群增长倍数, $T = \Sigma x L_x m_x / \Sigma L_x m_x$ 为平均世代。

1.2 Birch 算法

Lotka^[1] 导出在稳定年龄组配下, r_m 满足方程

$$\int_0^{+\infty} e^{-r_m x} L_x m_x dx = 1 \quad (2)$$

其中积分区间 $(0, +\infty)$ 表示生长历期。据方程 (2), Birch 提出的算法为:

$$\Sigma e^{-r_m x} L_x m_x = 1 \quad (3)$$

1.3 Howe 算法

$$r_m = \ln R'_0 / (D + L/2) \quad (4)$$

其中 D 为未成熟期, L 为产卵期, $R'_0 = \Sigma E'$ 为历经一个平均世代 $T = D + L/2$ 后一个雌体开始繁殖的后代数。

1.4 文[2]的算法

$$\Sigma e^{-r_m(x-\Delta x/2)} L_x m_x = 1 \quad (5)$$

其中 Δx 为区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度。

2 r_m 的改进算法

由方程 (2) 通过积分然后计算参数 r_m 的值, 需要知道函数 $L_x m_x$, $L_x m_x$ 是与物种年龄 x 有关的变量, 反映二者之间关系的不是解析式, 而是由试验得到的数据集, 因而 (2) 式左端的积分难以计算, 这正是本文致力讨论的问题。

2.1 回归分析法

为了从试验所得的一组数据求得函数 $L_x m_x$ 的解析表达式, 令 $y = \psi(x) = L_x m_x$, 用回

归的方法求得 $\dot{y}=f(x)$, 因 $y=\phi(x) \geq 0$, 故定义

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \quad x \in (a, b) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

将上式代入(2)式, 得

$$\int_0^{+\infty} e^{-r_m x} L_m dx \approx \int_a^b e^{-r_m x} \phi(x) dx \quad (6)$$

当(6)式右端可积分时, 则得

$$\int_a^b e^{-r_m x} \phi(x) dx = g(r_m) \quad (7)$$

解方程 $g(r_m)=1$, 即得 r_m .

2.2 试差法

文[2]的算法是基于 Lotka 导出的方程(2)所建立的 r_m 近似数值算法。由 $\phi(x)$ 的意

义及 $e^{-r_m x}$ 可知, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-r_m x} \phi(x) dx$ 是收敛的, 因此当 n 充分大时, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-r_m x} \phi(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-r_m x} \phi(x) dx$$

而

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-r_m x} \phi(x) dx &= -\frac{1}{r_m} e^{-r_m x} \phi(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{r_m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-r_m x} d\phi(x) \\ &= -\frac{1}{r_m} [e^{-r_m x_i} \phi(x_i) - e^{-r_m x_{i-1}} \phi(x_{i-1})] + \frac{1}{r_m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-r_m x} d\phi(x) \end{aligned}$$

因为函数 $e^{-r_m x} \phi(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上满足积分第一中值定理, 故

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-r_m x} \phi(x) dx &= -\frac{1}{r_m} [e^{-r_m x_i} \phi(x_i) - e^{-r_m x_{i-1}} \phi(x_{i-1})] + \frac{1}{r_m} e^{-r_m \xi_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\phi(x) \\ &= -\frac{1}{r_m} [e^{-r_m x_i} \phi(x_i) - e^{-r_m x_{i-1}} \phi(x_{i-1})] + \frac{1}{r_m} e^{-r_m \xi_i} [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})] \\ &= \frac{1}{r_m} \phi(x_i) [e^{-r_m \xi_i} - e^{-r_m x_i}] + \frac{1}{r_m} \phi(x_{i-1}) [e^{-r_m x_{i-1}} - e^{-r_m \xi_i}] \\ &\quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i) \end{aligned}$$

即 r_m 应满足

$$\sum_{i=1}^n \phi(x_i) [e^{-r_m \xi_i} - e^{-r_m x_i}] + \sum_{i=1}^n \phi(x_{i-1}) [e^{-r_m x_{i-1}} - e^{-r_m \xi_i}] = r_m \quad (8)$$

在实际计算中, 当各区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 长度相等时, 即 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x$, 由微分中值定理, 得

$$\begin{aligned} e^{-r_m \xi_i} - e^{-r_m x_i} &= (x_i - \xi_i) r_m e^{-r_m \xi_i} \quad (\xi_i < \xi_i' < x_i) \\ e^{-r_m x_{i-1}} - e^{-r_m \xi_i} &= (\xi_i - x_{i-1}) r_m e^{-r_m \xi_i} \quad (x_{i-1} < \xi_i' < \xi_i) \end{aligned}$$

并取 ξ_i, ξ_i', ξ_i'' 为区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的等分点, 则(8)式变为

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{2} \phi(x_i) e^{-r_m (x_i - \Delta x/4)} + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{2} \phi(x_{i-1}) e^{-r_m (x_{i-1} + \Delta x/4)} \approx 1 \quad (9)$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i) e^{-r_m x_i} = \frac{\frac{2}{\Delta x} e^{\frac{\Delta x}{4} r_m} - \psi(x_n) e^{-r_m(x_n - \Delta x/2)} - \psi(x_0) e^{-r_m x_0}}{1 + e^{\frac{\Delta x}{2} r_m}} \quad (10)$$

令

$$Q(r_m) = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i) e^{-r_m x_i}, R(r_m) = \frac{\frac{2}{\Delta x} e^{\frac{\Delta x}{4} r_m} - \psi(x_n) e^{-r_m(x_n - \Delta x/2)} - \psi(x_0) e^{-r_m x_0}}{1 + e^{\frac{\Delta x}{2} r_m}} \quad (11)$$

对于给定的精度(比如 10^{-5}),利用试差法,若

$$Q(r_m^0) \approx R(r_m^0) \quad (12)$$

则 r_m^0 即为所求 r_m 的近似估计值。

当 $\Delta x_i \neq \Delta x (i=1, 2, \dots, n)$ 时,取 ξ_i, ξ'_i, ξ''_i 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 的等分点,类似地可求得 r_m 满足

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i e^{-r_m(x_i - \frac{\Delta x_i}{4})} \psi(x_i) + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \psi(x_{i-1}) e^{-r_m(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{4})} \approx 2 \quad (13)$$

$$\text{令 } Q'(r_m) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i e^{-r_m(x_i - \frac{\Delta x_i}{4})} \psi(x_i), R'(r_m) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \psi(x_{i-1}) e^{-r_m(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{4})} \quad (14)$$

对于给定的精度,当 r_m 近似满足

$$Q'(r_m) + R'(r_m) = 2 \quad (15)$$

时即为所求。

3 算 例

据下表[2]的数据,分别用回归分析法和试差法求 r_m 。

序号	x	L_{xm}	序号	x	L_{xm}	序号	x	L_{xm}
0	37.5	0	9	64.5	16.464	18	91.5	10.585
1	40.5	0.182	10	67.5	15.696	19	94.5	10.273
2	43.5	0.816	11	70.5	14.109	20	97.5	9.646
3	46.5	10.680	12	73.5	12.530	21	100.5	9.802
4	49.5	13.416	13	76.5	12.502	22	103.5	9.760
5	52.5	14.928	14	79.5	12.797	23	106.5	8.604
6	55.5	15.504	15	82.5	13.323	24	109.5	8.239
7	58.5	14.736	16	85.5	12.228	25	112.5	6.936
8	61.5	14.856	17	88.5	11.393			

3.1 用回归分析法求 r_m

按表中数据作散点图(图略),以二次抛物线回归较好。设

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

其中 $x_1 = x, x_2 = x^2$

经计算得 $\bar{x}_1 = 75, \bar{x}_2 = 6131.25, \bar{y} = 10.7694, L_{yy} = 522.6862$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13162.5 & 1974375 \\ 1974375 & 301463370 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0.004316 & -0.00002826 \\ -0.00002826 & 0.000000188 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} L_{1y} \\ L_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260.7435 \\ -2503.7485 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = L^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.1960 \\ -0.007839 \end{bmatrix}, \quad b_0 = -30.8677$$

回归函数

$$\hat{y} = -30.8677 + 1.196x - 0.0078x^2$$

回归平方和 $U = 331.4408$, 剩余平方和 $Q = 191.2454$, $C_{11} = 0.004316$, $C_{22} = 0.000000188$. 算得

$$F = \frac{U/2}{Q/23} = 19.93, \quad F_1 = \frac{b_1^2/C_{11}}{Q/23} = 39.86, \quad F_2 = \frac{b_2^2/C_{22}}{Q/23} = 38.92$$

$F_{0.01}(2, 23) = 5.66$, $F_{0.01}(1, 23) = 0.788$, 回归效果极显著.

由于 $\psi(x)$ 是非负函数, 令 $\hat{y}_0 = 0$, 得 $x_1 = 32.8462$, $x_2 = 120.4872$. 定义

$$\psi(x) = \begin{cases} -30.8677 + 1.196x - 0.0078x^2 & 32.8462 \leq x \leq 120.4872 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由(7)式, 得

$$\begin{aligned} g(r_m) &= \int_{32.8462}^{120.4872} e^{-r_m x} (-30.8677 + 1.196x - 0.0078x^2) dx \\ &= e^{-32.8462r_m} \left(\frac{0.0011}{r_m} + \frac{0.6836}{r_m^2} - \frac{0.0156}{r_m^3} \right) \\ &\quad + e^{-120.4872r_m} \left(\frac{-0.0011}{r_m} + \frac{0.6836}{r_m^2} + \frac{0.0156}{r_m^3} \right) \end{aligned}$$

解方程 $g(r_m) = 1$, 得 r_m 的估计值 $\hat{r}_m = 0.1139$.

3.2 用试差法求 r_m

按表所给的数据集知, $\Delta x = 3$, $\psi(x_0) = \psi(37.5) = 0$, $\psi(x_n) = \psi(112.5) = 6.936$. 由(11)式得

$$Q = \sum_{i=1}^{24} \psi(x_i) e^{-r_m x_i}, \quad R = \frac{\frac{2}{3} e^{0.75r_m} - 6.936 e^{-111r_m}}{1 + e^{1.5r_m}}$$

为加快试差法运算, 可先由(1)式算得

$$T = \sum x_i \psi(x_i) / \sum \psi(x_i) = 75.931$$

$$r_m = \frac{1}{T} \ln[\sum \psi(x_i)] = 0.07421$$

再取大于由(1)式算得的 r_m 为初值(这里 $r_m = 0.07421$ 偏小), 经试差法计算, $Q(0.10782) \approx R(0.10782)$, 故得 $\hat{r}_m = 0.10782$.

3.3 结果比较

从理论上讲, 求得函数 $\psi(x) = L_x m_x$ 的解析表达式, 再通过(2)式的积分, 求解方程 $g(r_m) = 1$, 所得到的 r_m 值应该是精确度最高的, 因为它对试验的范围作了一定的外延. 对本文的算例, (11)式是在区间 $[37.5, 112.5]$ 内求 r_m 的, 而按回归分析的方法, 则是在区间 $[32.8, 120.5]$ 上求 r_m 的. 当试验的布点具有局部性时, 用回归的方法求 r_m 更能反映客

观实际。但回归分析法往往受到模型选择的制约,其精度会随之受到影响,显然其计算量也比较大。

(12)式或(15)式是一种就试验结果计算 r_m 的实用算法,它比之于(3)式,(5)式,由推导过程可见其精度高。(11)式中 $Q(r_m)$ 比(5)式左端的计算更简单, $R(r_m)$ 的计算量不大,改进的算法基本未增大计算量,但公式更为合理。

参 考 文 献

- 1 Lotka A.J. Elements of physical biology. Willams & Wilkins, 1925
- 2 张文军,汪世泽. 内禀增长力精确算法公式的改进. 西北农业大学学报, 1989, 17(增)57~62
- 3 陈兰荪主编. 生物数学引论. 北京: 科学出版社, 1988
- 4 数学手册编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1979
- 5 吉林大学数学系编. 数学分析. 北京: 人民教育出版社, 1978

Improvement of a r_m Calculation Formula

Liu guangzou Shi Meiyling

(Department of Basic Courses, Northwestern Agricultural University Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract A r_m calculation method with regression analysis and method of trial is presented in this paper. The method can, to some extent, raise the calculation precision of r_m .

Key words regression analysis, method of trial, intermediate value theorem

欢迎订阅 1996 年 《陕西农业科学》

《陕西农业科学》是由陕西省农业科学院主办的综合性农业科技刊物, 1992 年被评为中国农学类核心期刊。办刊宗旨: 立足本省, 面向全国, 贯彻“双百”方针, 突出旱地农业, 提高与普及兼顾, 追踪农业科学研究热点, 报道最新农业研究成果, 提供创新性的实用技术。竭诚为农业科研人员、大专院校师生、各级管理干部、农技推广人员及农村专业户服务。欢迎订阅。

为适应市场经济的需要和满足广大广告客户的需求, 我刊将进一步扩大广告经营范围, 并以优惠价刊登各类广告。

《陕西农业科学》为双月刊, 逢单月 25 日出版。16 开本, 48 页, 公开发行, 每册定价 1.50 元, 邮发代号 52—50, 全国各地邮局(所)均可订阅。

编辑部邮编及地址: 712100 陕西省杨陵镇省农业科学院内