

## 渠系非恒定流数值模拟方法的应用\*

王 丽 波

(西北农业大学水利与建筑工程系, 陕西杨陵·712100)

**摘 要** 渠系非恒定流的数学处理目前尚无精确的解法。本文用数值方法对灌区渠系的水流运动要素进行了计算并与实测资料进行对比,认为直接差分方法和特征线方法可供渠系优化调控时使用。

**关键词** 非恒定流, 运动要素, 初始条件, 边界条件, 数值解法

**中图分类号** TV133.2

灌区, 数值模拟, 水流运动要素

由于渠系过水断面的水流运动要素是随着时间和流程变化的,因而实际运行中应对渠系中的流量与水位根据需要进行不断调控。渠系非恒定流的数学处理是一个重要而困难的问题。因为在函数关系中包括很多的变数。目前尚无精确的解析解法,实践上常用数值解法,其中用圣·维南方程解这一问题获得成功,这已在近百年来水力学研究中得到了证实。尽管这一方程的解法,早已提出,但计算工作量仍很繁重。因此在实践中常将渠系非恒定流问题近似用恒定流方法进行计算,求其近似解,但与工程实际应用还是有一定差别。

随着计算科学的发展,特别是计算机的出现,使这种繁琐的计算大为简化,因它方便而又迅速,这样,就给工程设计及用水管理提供了可靠的依据。数值解法,又称数学模型法,是当前求解明渠非恒定流问题中最常采用的一种方法。为了对灌溉渠系用水进行优化调控,可用数学模型法对灌溉渠道水流运动要素进行计算。

明渠非恒定流的基本理论,近百年来进展不快。然而在数值模拟和计算技术方面却有很大进展,计算方法很多。但究竟采用什么计算方法才能作到既节约计算工作量又可以获得满意的结果还需进行一些探讨,以便使之在实践中推广应用。

## 1 理论依据

### 1.1 圣·维南方程组(Saint-Venant)

明渠非恒定流的基本方程组,即圣·维南方程组,可用于求解不同边界条件下的各种非恒定流问题。圣·维南方程的数值解法:首先,是将其离散化,就是将偏微分方程化为一组代数方程,也就是把微分方程连续的定域离散到定解域中的一些网格点(节点)上。其次,是求解这组代数方程,给出解在这些离散点(节点)上的近似值。

取  $h, Q$  为变量时,圣·维南方程组的形式可写为:

$$B \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + 2 \left( \frac{Q}{A} \right) \frac{\partial Q}{\partial S} + [gA - B \left( \frac{Q^2}{A} \right)] \frac{\partial h}{\partial x} = N \quad (1)$$

收稿日期,1992-07-14.

\* 高等学校博士点基金资助项目。

式中 常数  $N = gAi - g \frac{Q^2}{AC^2R}$

$Q, h$ ——渠系流量和水深;  $B, A$ ——水面宽度和过水断面面积;  $S, t$ ——距离和时间(自变量)

## 1.2 计算方法

有了基本方程,可用差分法和特征线方法求解。考虑到目前还没有一种公认和普遍适用的“最佳”算法。我们选择了直接差分法、特征线法进行计算对比。

(1)直接差分法 采用该法的目的,是用差分方程的解来近似代替偏微分方程的解。要求在一定的步长和时间条件下,对考察区域的一切网点差分方程的解与偏微分方程的解接近。虽然差分方程的建立有一定的任意性,但它也有约束,即要求差分方程的数值解应逼近于微分方程的精确解。当步长趋近于零时差分方程逼近微分方程,在前一次计算中产生的误差对以后各次计算成果,影响是越来越小,也就是根据设计任务的要求,使求出的结果能符合实际与需要,从计算上来说,要求具有一定精度的稳定格式。

直接差分法的基本思想是在空间  $S$  和时间  $t$  两个方面,将本来属于连续性的问题离散化,也就是根据原始资料、计算精确度和稳定性的要求,选取空间步长  $\Delta S$  和时间步长  $\Delta t$ ,在自变量  $S-t$  平面上划分一系列矩形网格,使连续的求解域离散为网格点(结点和节点)上的求解。然后,按数值分析中的差商逼近微商的方法(差商可分前差、后差、中心差等)将连续的微分方程组离散为不连续的结点上的差分方程组(线性的或非线性的代数方程),然后联立求解,以得到结点上的未知量。差商代替微商必然带来误差,当然误差越小越好,一般中心差商高于前差、后差,因中心差商是二阶逼近精度、而前差、后差是一阶逼近精度。

(2)特征线法 特征线法的基本思想是化两个方向的微商为一个方向的微商,化偏微分方程为常微分方程,然后根据常微分方程进行数值求解。这里如何引进特征方向(或特征线方程)是个关键。圣·维南方程组是一个含有两个因变量的拟线性偏微分方程组,通过线性组合,可得特征线方程和特征方程,可写成如下的形式:

$$\text{特征线方程组} \quad \frac{dS}{dL} = \omega_{\pm} = V \pm \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (2)$$

$$\text{特征方程组为} \quad B\omega_{\pm} \left[ \frac{\partial Z}{\partial x} + \omega_{\pm} \frac{\partial Z}{\partial S} \right] - \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \omega_{\pm} \frac{\partial Q}{\partial S} \right] = \omega_{\pm} g - N \quad (3)$$

式中  $N = gAi - g \frac{Q^2}{AC^2R} = gAi - \frac{gQ^2 n^2 X^{4/3}}{A^{2/3}}$

求解圣·维南方程组的特征线法就是对与之等价的 4 个常微分方程进行求解。

$i, n$ ——渠道底坡和粗糙系数;  $C, R, X$ ——谢才系数、水力半径、湿周;  $V, \omega$ ——断面平均流速和绝对波速。

特征线法是先把基本方程组转化为特征线的常微分方程组,再结合初始条件和边界条件进行数解。而直接差分法是直接根据基本方程组,以差商代替偏导数,化为相应的差分方程组,结合初始条件和边界条件进行数值求解。计算效果取决于差分格式和步长的选择。

## 2 不同计算方法的应用

### 2.1 初始条件和边界条件

在明渠中非恒定流的初始条件可以表示为某一初始时刻  $T_0$  时全渠的水位(或水深)和流量(或流速),即

$$Z_{i=T_0} = Z(S) \quad Q_{i=T_0} = Q(S) \quad (4)$$

初始条件,可以是在受扰动前的恒定流动,当然也可以是已经发生了的非恒定流动。边界条件是多种多样的。常用上游边界条件是渠首断面的流量随时间的变化过程线,它的数学表达式为:

$$Q_{i=0} = Q(t) \quad \text{或} \quad Z_{i=0} = Z(t) \quad (5)$$

而下游边界条件,也就是渠尾断面应满足的水力条件,一般可用该断面的水位流量关系来表示,即

$$Z_{i=N} = Z(Q) \quad (6)$$

如果渠道泄入较大的湖泊或水库,这时渠尾断面上的水位改变很微小,可认为水位不变

$$Z_{i=N} = \text{Const} \quad (7)$$

也可将上、下游边界条件的通用形式写成如下:

$$\text{上游边界条件:} \quad a_0 Z_1 + C_0 Q_1 = e_0 \quad (8)$$

$$\text{下游边界条件:} \quad a_N Z_N + C_N Q_N = e_N \quad (9)$$

式中如  $C_0, C_N$  为零,则边界条件分别为上、下游边界断面上的水位过程线;

如  $a_0, a_N$  为零时,则为上、下游边界断面上的流量过程线;

如  $a_0, C_0, a_N, C_N$  均不为零,则为上、下游边界断面的水位~流量关系曲线。

2.2 算法应用举例,下面介绍3种不同的算法:

(1)第1种算法:隐式差分格式类型很多,也是目前正在发展中的差分方法。隐式差分需要解联立方程,才能由前一时段的已知量求出后一时段的未知量。我们采用四点中心隐式差分格式,其网格的距离步长是  $\Delta S$  可以是不等距的,而时间步长一般是等距的,研究网格中任一矩形单元如图(1)所示。前一时刻(即  $J$  时刻)  $a, b$  两点的水力要素已知,而后一时刻(即  $J+1$ )  $c, d$  两点为未知。

设每一矩形单元内的水力要素呈直线变化,因此在该单元中任意点  $M$  处有以下关系:

$$Y(M) = Y(S, t) = \frac{\theta}{2} (Y_{i+1}^{j+1} + Y_{i-1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (Y_{i+1}^j + Y_i^j) \quad (10)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta S} = \theta \frac{Y_{i+1}^{j+1} - Y_i^{j+1}}{\Delta S} + (1-\theta) \frac{Y_{i+1}^j - Y_i^j}{\Delta S} \quad (11)$$

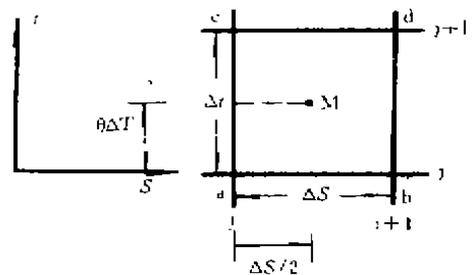


图1 计算网格示意图

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{Y_{i+1}^j - Y_{i-1}^j + Y_i^{j+1} - Y_i^j}{2\Delta t} \quad (12)$$

式中:  $Y$ ——代表水深(或流量),上角标表示时间,下角标表示断面位置。 $\theta$  为加权系数,  $0 < \theta \leq 1$  格式是稳定的。在  $Y, \Delta Y/\Delta S, \Delta Y/\Delta t$  中均含有  $i$  和  $i+1$  点的时段末  $j+1$  时刻的未知量,故为隐式差分格式。

为了解  $J+1$  时刻  $N$  个断面的未知量  $Q$  及  $h$ , 则未知量为  $2N$  个。每一河段根据基本方程建立  $2(N-1)$  个差分方程, 加上两个边界条件就有  $2N$  个方程。用隐式差分非恒定流时, 主要问题之一是求解联立差分方程(即求解非线性方程组)。

我们前面应用稳式差分法求解  $S-V$  方程组时, 取较大的时间步长  $\Delta t$  仍能获得稳定的数值解, 这就减少了计算时间。但当求解域很大、需求解大型线性方程组时, 如前介绍的第一种算法采用高斯消去法, 仍存在着时间上的浪费。求解  $2N$  个方程组的高斯消去法, 其标准计算程序须要储存  $2N \times 2N$  个矩阵系数, 其系数矩阵大部分为零所占有, 对储存来说不经济, 这时可采用第 2 种算法。

(2) 第 2 种算法: 全段为  $2N$  个非线性方程式为: (推导略)

上游边界条件:  $a_0 Z_1 + C_0 Q_1 = e_0$

$$\begin{aligned} i=1 & \begin{cases} Z_1 - C_{11} Q_1 + Z_2 + C_{11} Q_2 = e_{11} \\ a_{21} Z_1 + C_{21} Q_1 - a_{21} Z_2 + d_{21} Q_2 = e_{21} \end{cases} \\ i=2 & \begin{cases} Z_2 - C_{12} Q_2 + Z_3 + C_{12} Q_3 = e_{12} \\ a_{22} Z_2 + C_{22} Q_2 - a_{22} Z_3 + d_{22} Q_3 = e_{22} \end{cases} \\ i=i & \begin{cases} Z_i - C_{1i} Q_i + Z_{i+1} + C_{1i} Q_{i+1} = e_{1i} \\ a_{2i} Z_i + C_{2i} Q_i - a_{2i} Z_{i+1} + d_{2i} Q_{i+1} = e_{2i} \end{cases} \\ i=N-1 & \begin{cases} Z_{N-1} - C_{1,N-1} Q_{N-1} + Z_N + C_{1,N-1} Q_N = e_{1,N-2} \\ a_{2,N-1} Z_{N-1} + C_{2,N-1} Q_{N-1} - a_{2,N-1} Z_N + d_{2,N-1} Q_N = e_{2,N-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

下游边界条件:  $a_N Z_N + d_N Q_N = e_N$

式(13)是一种大型稀疏非线性方程组, 通常多采用追赶法(或叫双消去法)求解。但因系非线性情况, 须作反复迭代计算。

式(13)的矩阵形式(略)是一种围绕对角线排列的带状矩阵, 可通过矩阵的初等变换, 转换为三对角矩阵, 后进行回代求得所有未知数的解, 但也应作反复迭代的计算。

(3) 第 3 种算法: 即特征线方法。圣·维南方程组的特征线法分为特征网格法和矩形网格法两类。我们采用矩形网格特征线差分法。

当取  $h, Q$  为变量时  $S-V$  方程组可写成如下形式

$$B_s \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + 2 \left( \frac{Q}{A} \right) \frac{\partial Q}{\partial S} + [gA - B_s \left( \frac{Q^2}{A} \right)] \frac{\partial h}{\partial x} = N$$

$$\text{式中 } N = gAi - g \frac{Q^2}{AC^2 R} = gAi - \frac{gQ^2 n^2 X^{4/3}}{A^{7/3}}$$

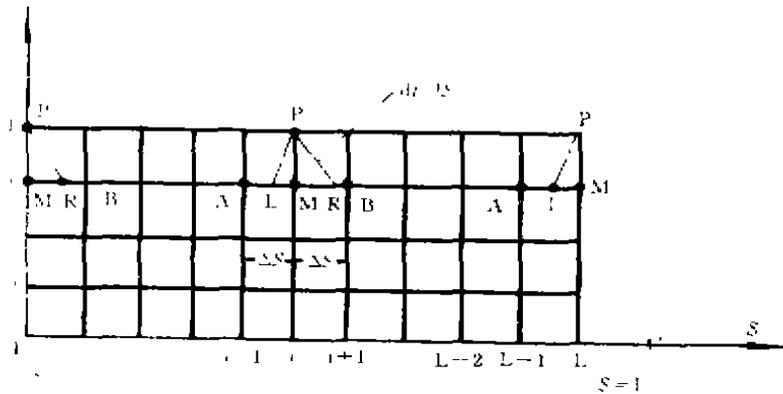


图 2 矩形网格示意图

$$\text{特征线方程组为} \quad \frac{ds}{dt} = V \pm \sqrt{gA/Bs} = \omega_{\pm} \quad (14)$$

$$\text{特征方程组为} \quad (Bs\omega_{\pm})dh - dQ = -Ndt \quad (15)$$

将方程组写成差分形式后解方程可得:(推导略)

$$(1) \text{上游边界点 } P \text{ 的计算} \quad h_p = h_R + [Q_p - Q_R + (No)_M \Delta t] / (Bs\omega_{+})_M \quad (16)$$

$$(2) \text{下游边界点 } P \text{ 的计算} \quad Q_p = Q_L + (Bs\omega_{-})_M (h_p - h_L) - (No)_M \Delta t \quad (17)$$

$$(3) \text{中间断面点 } p \text{ 的计算} \quad Q_p = Q_L + (Bs\omega_{-})_M (h_p - h_L) - (No)_M \Delta t$$

$$\text{或} \quad Q_p = Q_R + (Bs\omega_{+})_M (h_p - h_R) - (No)_M \Delta t$$

(4) 稳定条件要求时间步长需满足柯朗条件

$$\Delta t \leq \frac{\Delta S}{V + \sqrt{gA/Bs}} \quad (18)$$

以上的计算程序与计算框图(略)。

计算程序(略)是用 FORTRAN 语言编制,并在 IBM,燕山微机,及 M340 机上进行运算的。

用前述三种不同算法对永济灌域渠系中各干渠、分干等渠中的水流状态进行了计算,现将部分计算的成果列表于下。计算时间按每隔 6 h 摘录,而灌域实测值一般是 1 d 测 1 次。有的渠道还没有实测值,当无实测资料时,若渠中的水流为缓流,则可由下往上推算,同时认为口闸与下游水情变化趋势是一致的,也可用内插求得。此法所得结果要比有实测资料时的精度差,但可作为无资料时计算的一种估算方法。

表 1 永兰分干口闸~一闸段 1989 年 5 月 13 日~5 月 15 日水情变化值

时 间		流量 $Q(m^3/s)$				水位 $Z(m)$			
月/日	(h)	实测值	计 算 值			实测值	计 算 值		
			方法①	方法②	方法③		方法①	方法②	方法③
5/13	0.00	12.35	11.95	11.95	12.00	1 039.40	1 039.40	1 039.40	1 039.40
	6.00		12.55	8.65	12.30		1 039.70	1 039.50	1 039.20
	12.00		13.60	10.30	13.10		1 039.70	1 039.60	1 039.30
	18.00		14.00	11.70	13.90		1 039.80	1 039.60	1 039.30
5/14	24.00	15.20	14.98	12.50	14.70		1 039.85	1 039.65	1 039.40
	30.00		14.90	12.50	15.44		1 039.90	1 039.70	1 039.40
	36.00		14.95	12.83	16.21		1 039.90	1 039.70	1 039.50
	42.00		15.10	13.10	16.90		1 039.90	1 039.70	1 039.50
5/15	48.00	15.55	14.98	13.35	17.70		1 039.85	1 039.70	1 039.60
	54.00		15.00	13.52	18.40		1 039.80	1 039.70	1 039.60
	60.00		15.00	13.70	19.10		1 039.80	1 039.70	1 039.60
	66.00		15.06	13.90	19.10		1039.80	1039.70	1039.70

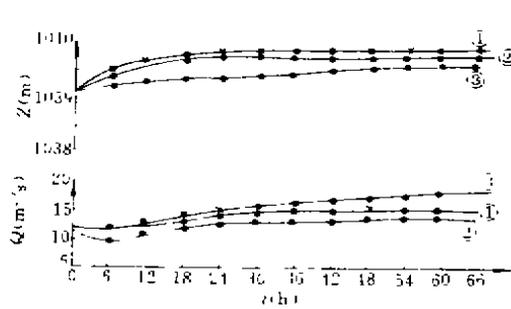


图 3 永兰分干 口闸

符号说明: X—为实测值; ①为第 1 种算法;  
②为第 2 种算法; ③为第 3 种算法

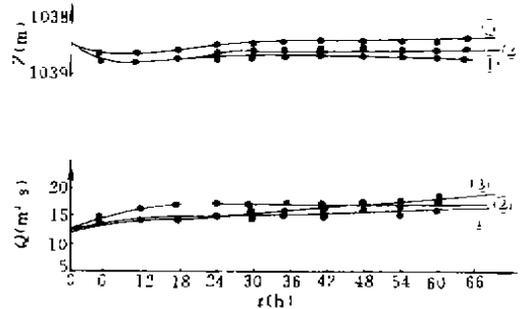


图 4 永兰一闸~二闸

表 2 永兰分干一闸~二闸段 1989 年 5 月 13 日~15 日水情变化值

时 间		流量 $Q(m^3/s)$				水位 $Z(M)$			
月/日	(h)	实测值	计 算 值			实测值	计 算 值		
			方法①	方法②	方法③		方法①	方法②	方法③
5/13	0.00	12.30	12.25	12.25	12.30	1 038.56	1 038.56	1 038.56	1 038.56
	6.00		13.80	15.50	13.60		1 038.20	1 038.20	1 038.30
	12.00		13.90	15.80	13.60		1 038.20	1 038.20	1 038.40
	18.00		13.80	16.60	14.21		1 038.20	1 038.30	1 038.40
5/14	24.00		18.20	17.00	15.00		1 038.30	1 038.40	1 038.50
	30.00		14.30	16.90	15.54		1 038.30	1 038.40	1 038.50
	36.00		18.50	16.60	16.20		1 038.30	1 038.40	1 038.50
	42.00		14.30	16.50	16.80		1 038.30	1 038.40	1 038.60
5/15	48.00	15.55	18.70	16.40	17.50		1 038.30	1 038.40	1 038.60
	54.00		14.30	16.30	18.10		1 038.30	1 038.40	1 038.60
	60.00		18.70	16.20	18.80		1 038.20	1 038.40	1 038.70
	66.00		14.30	16.10	19.00		1038.20	1038.40	1038.70

表3 西东分干口闸至一闸1989年5月5日~5月7日水情变化值

时 间		流量 $Q(m^3/S)$			水位 $Z(m)$				
月/日	(h)	实测值	计算值			实测值	计算值		
			方法①	方法②	方法③		方法①	方法②	方法③
	0.00	无			18.60	1036.65	1036.65	1065.65	1065.85
5/13	6.00		16.90	12.40	18.80		1036.83	1036.50	1036.80
	12.00		16.30	12.60	19.20		1036.80	1036.40	1036.80
	18.00		16.10	12.70	19.80		1036.80	1036.50	1036.80
	24.00		16.10	12.90	20.20	1036.75	1036.72	1036.50	1036.85
5/14	30.00		16.30	13.10	20.70		1036.80	1036.50	1036.90
	36.00		16.50	13.20	21.20		1036.80	1036.50	1036.90
	42.00		16.70	13.30	21.80		1036.80	1036.50	1036.90
	48.00		16.70	13.40	22.30	1036.82	1036.80	1036.50	1036.90
5/15	54.00		16.70	13.80	22.80		1036.80	1036.50	1036.90
	60.00		16.50	14.20	23.30		1036.80	1036.60	1036.90
	66.00		16.20	14.50	23.30		1036.80	1036.60	1036.90

从计算成果比较可看出,第1种算法与实测值吻合较好,是采用牛顿-拉普逊迭代法,一般当初值数接近真解时,迭代结果较理想,收敛速度较快,在计算过程中资料易整理,精度也较满意。第2种算法是采用直接追赶法计算的,一般当具有大型稀疏非线性方程组时常采用此法求解。因系非线性情况,须反复迭代,在计算过程中,每步引起的舍入误差在以后各步中逐渐减少,稳定性较好。资料整理较第1种方法要繁些,上机时间较第1种算法少,精度较差些。第3种算法从程序结构较前两种算法简单资料易整理,上机时间比前两种算法要少,但精度不如第1种算法精度高。

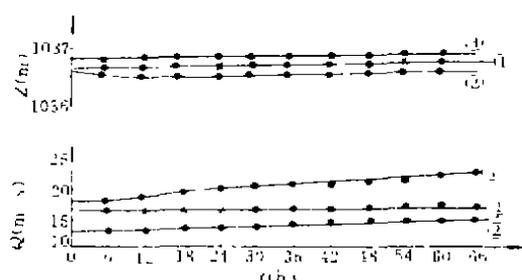


图5 西东分干 口闸

### 3 结 语

(1)计算精度问题须认真对待,否则即便获得计算结果,有时也未必可靠。精度最好是在两种算法(相同步长)的结果相当接近时,才认为成果是可以接受的。

(2)在计算过程中出现不稳定时,可调整时间差分、步长与参数。至于在每种具体情况下,如何选择时间步长,是个复杂的问题。除借鉴以往的经验外,最好还是通过计算试验来选择最佳的时间步长。

(3)通常认为隐式差分法是无条件稳定的、允许时间步长较大,而实际计算过程中出现负水深,水面线有不同程度的附加波动。因此计算时往往还要通过试算来选择时间步长。

(4)计算结果的可靠性不是纯粹决定基本方程,离散方法和计算格式的处理。主要取决于原始资料的精度和对糙率、形状等天然条件和水流模拟的概化程度,这是一项带有经

验与技巧性的工作。

本课题系朱凤书教授主持课题的一部分。参加上机计算的还有张讲文,张明亮等同志。

### 参 考 文 献

- 1 Madhmood K Yevjevich V. 编;林秉南等译校.明渠不恒定流.北京:水利电力出版社,1987
- 2 武汉水利电力学院.明渠不恒定流的基本理论和计算方法.水利电力科技,1980
- 3 徐正凡主编.水力学.北京:高等教育出版社,1987
- 4 杨景芳编著.微机计算水力学.大连:大连理工大学出版社,1991

## Application of Numerical Model Method to Unsteady Flow in Canal Systems

Wang Libo

(*Department of Hydraulic Construction Engineering, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100*)

**Abstract** At present there is no accurate solution to mathematic processes to the unsteady flow in canal systems. The numerical method is used to calculate the key elements of kinetic flow in canal systems and also, comparison is made with the measured data in this paper. As a result, the direct difference method and the characteristic method can be expected to use in the optimal adjustment and control of canal systems.

**Key words** unsteady flow, kinetic key element, initial condition, boundary condition, numerical method