62-66

第21卷 第1期　　西北农业大学学报　　Vol.21 No.1
1993年1月　　Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalis　　Jan. 1993

几何设计中圆锥曲线法的一种表述法

王乃信　张公顺
(西北农业大学基础课部, 陕西杨陵·712100)

摘　要　对计算机辅助几何设计中的圆锥曲线法，提出一种比较简捷的表述法.从而把各种不同条件和限制下的圆锥曲线方程统一起来，得出在典型情况下圆锥曲线唯一存在的充分必要条件，并推出相应圆锥曲线的一般方程和参数方程表达式.

关键词　~~计算机辅助几何设计~~; 圆锥曲线法; 计算几何　几何设计, CAD
中图分类号　TP391.7; O241

在自由型曲线及自由型曲面母线与基线的设计中，人们很早就采用圆锥曲线法.电子计算机产生以后，又逐步发展了许多类型的几何设计法，例如各种样条函数法等.但圆锥曲线法仍在发展完善，并在近年发展起来的计算机辅助几何设计中，得到广泛的应用，这不仅因为圆锥曲线方程简单，光滑性好，保凸性好，还因为圆锥曲线所需要的几何信息少，并且可以方便地通过改变输入信息修正和控制设计曲线.

目前，圆锥曲线法中确定圆锥曲线方程的方法主要有：解线性方程组法、曲线族法和参数方程法[1].这些方法，或者表述较繁，或者运算量较大，或者各种条件和限制下的方程不能统一，仍需不断加以改进.

本文提出一种表述法，可以称之为行列式法.它实质上是对曲线族法的一种改进.这种表述法比较简捷，能把不同条件和限制下的方程统一起来，还便于进行理论分析，例如，可以获得圆锥曲线唯一存在的充分必要条件.

1　基本结论

用齐次坐标将动点 P，定点 A_i，方向数 A_i'表示为

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad A_i=\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix},\quad A_i'=\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix}$$

用$|A_iA_jA_k|$表示行列式:

$$|A_iA_jA_K|=\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

依此类推.

定义下列三个函数:

收稿日期: 1991-11-04

$$\Phi_1(x,\ y,\ z)=|A_1A_5P|\cdot|A_2A_4P|\cdot|A_1A_2A_3|\cdot|A_5A_4A_3|$$
$$-|A_1A_5A_3|\cdot|A_2A_4A_3|\cdot|A_1A_2P|\cdot|A_5A_4P|,$$
$$\Phi_2(x,\ y,\ z)=|A_1A_1'P|\cdot|A_2A_4P|\cdot|A_1A_2A_3|\cdot|A_1A_4A_3|$$
$$-|A_1A_1'A_3|\cdot|A_2A_4A_3|\cdot|A_1A_2P|\cdot|A_1A_4P|,$$
$$\Phi_3(x,\ y,\ z)=|A_1A_1'P|\cdot|A_2A_2'P|\cdot|A_1A_2A_3|^2$$
$$-|A_1A_1'A_3|\cdot|A_2A_2'A_3|\cdot|A_1A_2P|^2.$$

约定：曲线过 A_1、A_2，A_3，A_4，A_5 点，称为满足条件 1；曲线过 A_1，A_2，A_3，A_4 点，且 A_1 点切向方向数为 A_1'，称为满足条件 2；曲线过 A_1，A_2，A_3 点，且 A_1，A_2 点切向方向数分别为 A_1'，A_2'，称为满足条件 3．基本结论表述为下列定理：

定理 1　满足条件 1 的圆锥曲线唯一存在的充要条件是：A_1、A_2，A_3，A_4，A_5 中任意四点不共线；满足条件 1 的非退化圆锥曲线唯一存在的充要条件是：A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 中任意三点不共线．其方程均为 $\Phi_1(x,\ y,\ 1)=0$．

定理 2　满足条件 2 的圆锥曲线唯一存在的充要条件是：A_1，A_2，A_3，A_4 中包括 A_1 的任意三点不共线；满足条件 2 的非退化圆锥曲线唯一存在的充要条件是：A_2，A_3，A_4 不共线，且直线 $|A_1A_1'P|=0$ 不过 A_2、A_3，A_4 中任一点．其方程均为 $\Phi_2(x,y,1)=0$．

定理 3　满足条件 3 的圆锥曲线唯一存在的充要条件是：直线 $|A_1A_1'P|=0$ 不过 A_2 点、直线 $|A_2A_2'P|=0$ 不过 A_1 点；满足条件 3 的非退化圆锥曲线唯一存在的充要条件是：直线 $|A_1A_1'P|=0$ 不过 A_2，A_3 中任一点，直线 $|A_2A_2'P|=0$ 不过 A_1、A_3 中任一点．其方程均为 $\Phi_3(x,\ y,\ 1)=0$．

上述结论虽然只叙述了由三种条件确定圆锥曲线的情形，实际上也包括了由其他各种条件确定圆锥曲线的情形。例如已知曲线段始点、顶点、终点以及另一点，已知曲线段始点、顶点、终点以及形因子等．

上述结论是借助于三阶行列式表达的，而且，结论中仅涉及特殊的三阶行列式，因而计算简单．

曲线族法在表述中，常常有许多限制，因此，即使在同种条件下，曲线族法所得到的方程也因不同限制而具有完全不同的形式[1]．上述结论则是在同种条件下，不管作何限制，所得到的方程总具有统一形式．

还要指出，上述三个方程还可统一起来，只要注意如下事实即可：当 A_5 点趋向于 A_1 点时，直线 $|A_1A_5P|=0$ 趋向于 $|A_1A_1'P|=0$，直线 $|A_5A_4P|=0$ 趋向于 $|A_1A_4P|=0$；又当 A_4 点趋向于 A_2 时，直线 $|A_2A_4P|=0$ 趋向于 $|A_2A_2'P|=0$，直线 $|A_1A_4P|=0$ 趋向于 $|A_1A_2P|=0$．因此，整个圆锥曲线法均可利用统一程序进行统一处理．

2　证明大意

2.1　必要性

在圆锥曲线上，如有三点共线，则必为由直线构成的退化圆锥曲线；如有两点连线

的方向数与其中一点切向方向数相同，则必为由直线构成的退化圆锥曲线.含一条直线的退化圆锥曲线不唯一.由此立得必要性的证明.

2.2 充分性

2.2.1 唯一性 两个相异的不全退化的圆锥曲线至多有四个公共点，两条相异的直线构成唯一的退化圆锥曲线.由此立得唯一性的证明.

2.2.2 存在性 首先指出、结论中的方程都是二元的，最高次项均不超过二次.容易验证，结论中的方程均满足相应的条件.因而，如果方程未退化为恒等式，即为所求圆锥曲线的方程.

(1) 方程 $\Phi_1(x, y, 1)=0$ 不可能退化.因为，如果退化，则有且仅有如下可能:

(a) $|A_1A_2A_3|\cdot|A_5A_4A_3|=|A_1A_5A_3|\cdot|A_2A_4A_3|=0$.此时，在 A_1, A_2, A_3, A_4 A_5 中有包括 A_3 的四点共线.

(b) $|A_1A_5P|=K_1|A_1A_2P|$, $|A_2A_4P|=K_2|A_5A_4P|$，其中 K_1、K_2 为常数.由此可得 $|A_1A_5A_2|=0$, $|A_2A_4A_5|=0$.此时，A_1、A_2、A_4、A_5 共线.

(c) $|A_1A_5P|=K_3|A_5A_4P|$, $|A_2A_4P|=K_4|A_1A_2P|$，其中 K_3、K_4 为常数.由此可得 $|A_1A_5A_4|=0$, $|A_2A_4A_1|=0$.此时，A_1、A_2、A_4、A_5 共线.

(2) 方程 $\Phi_2(x, y, 1)=0$ 不可能退化.因为，如果退化，则有且仅有如下可能:

(a) $|A_1A_2A_3|\cdot|A_1A_4A_3|=|A_1A_1'A_3|\cdot|A_2A_4A_3|=0$.此时，$A_1$、$A_2$、$A_3$ 共线，或 A_1、A_3、A_4 共线.

(b) $|A_1A_1'P|=K_1|A_1A_2P|$, $|A_2A_4P|=K_2|A_1A_4P|$，其中 K_1、K_2 为常数.由此可得 $|A_1A_1'A_2|=0$, $|A_2A_4A_1|=0$.此时，A_1、A_2、A_4 共线.

(c) $|A_1A_1'P|=K_3|A_1A_4P|$, $|A_2A_4P|=K_4|A_1A_2P|$，其中 K_3、K_4 为常数.由此可得 $|A_1A_1'A_4|=0$, $|A_2A_4A_1|=0$.此时，A_1、A_2、A_4 共线.

(3) 方程 $\Phi_3(x, y, 1)=0$ 不可能退化.因为，如果退化，则有且仅有如下可能:

(a) $|A_1A_2A_3|^2=|A_1A_1'A_3|\cdot|A_2A_2'A_3|=0$，此时，$A_1$、$A_2$、$A_3$ 共线.

(b) $|A_1A_1'P|=K_1|A_1A_2P|$, $|A_2A_2'P|=K_2|A_1A_2P|$，其中 K_1、K_2 为常数.此时，直线 $|A_1A_1'P|=0$ 过 A_2 点，亦即直线 $|A_2A_2'P|=0$ 过 A_1 点.

这就完成了存在性的证明.

3 直接推论

以下为了统一讨论，将函数 $\Phi_j(x, y, z)$ ($j=1, 2, 3$) 的下标省去，简记作 $\Phi(x, y, z)$.

3.1 一般方程

圆锥曲线的一般方程形如

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

由基本结论知，唯一存在满足定理条件的圆锥曲线，其方程为 $\Phi(x, y, 1)=0$.故可设

$$\Phi(x,\ y,\ 1)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

进而又有
$$\Phi(x,\ y,\ z)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2.$$

显然, $A=\Phi(1,\ 0,\ 0)$, $C=\Phi(0,\ 1,\ 0)$, $F=\Phi(0,\ 0,\ 1)$, $B=\Phi(1,\ 1,\ 0)-A-C$, $D=\Phi(1,\ 0,\ 1)-A-F$, $E=\Phi(0,\ 1,\ 1)-C-F$. 由此得如下形式的一般方程:

$$\begin{aligned}&\Phi(1,\ 0,\ 0)x^2+(\Phi(1,\ 1,\ 0)-\Phi(1,\ 0,\ 0)-\Phi(0,\ 1,\ 0))xy\\&\quad+\Phi(0,\ 1,\ 0)y^2+(\Phi(1,\ 0,\ 1)-\Phi(1,\ 0,\ 0)-\Phi(0,\ 0,\ 1))x\\&\quad+(\Phi(0,\ 1,\ 1)-\Phi(0,\ 1,\ 0)-\Phi(0,\ 0,\ 1))y+\Phi(0,\ 0,\ 1)=0.\end{aligned}$$

3.2　参数方程

设 $\Phi(x,\ y,\ 1)=0$ 为非退化圆锥曲线; $(x_0,\ y_0)$ 为曲线上一定点, 参数 t 对应的曲线上的点 $(x,\ y)$ 满足

$$y-y_0=t(x-x_0).$$

根据 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}&\Phi'_x(x_0,\ y_0,\ 1)(x-x_0)+\Phi'_y(x_0,\ y_0,\ 1)(y-y_0)\\&\quad+\frac{1}{2}\Phi''_{xx}(x_0,\ y_0,\ 1)(x-x_0)^2+\Phi''_{xy}(x_0,\ y_0,\ 1)(x-x_0)(y-y_0)\\&\quad+\frac{1}{2}\Phi''_{yy}(x_0,\ y_0,\ 1)(y-y_0)^2=0.\end{aligned}$$

此即

$$\Phi'_x(x_0,y_0,1)(x-x_0)+t\Phi'_y(x_0,y_0,1)(x-x_0)+\Phi(1,t,0)(x-x_0)^2=0.$$

由此得如下形式的参数方程:

$$\begin{cases}x-x_0=-\dfrac{\Phi'_x(x_0,\ y_0,\ 1)+t\Phi'_y(x_0,\ y_0,\ 1)}{\Phi(1,\ t,\ 0)},\\ y-y_0=t(x-x_0).\end{cases}$$

还可改写为:

$$\begin{cases}x-x_0=-\dfrac{x_0\Phi'_x(1,\ t,\ 0)+y_0\Phi'_y(1,\ t,\ 0)+\Phi'_z(1,\ t,\ 0)}{\Phi(1,\ t,\ 0)},\\ y-y_0=t(x-x_0).\end{cases}$$

特别地, 若 x_0, $y_0=0$(坐标平移总可达到), 则得如下形式的参数方程:

$$\begin{cases}x=-\dfrac{\Phi'_z(1,\ t,\ 0)}{\Phi(1,\ t,\ 0)},\\ y=tx.\end{cases}$$

还可改写为:

$$\begin{cases}x=1-\dfrac{\Phi(1,\ t,\ 1)}{\Phi(1,\ t,\ 0)},\\ y=tx.\end{cases}$$

参 考 文 献

1 张永曙, 刘克轩, 蒋大为. 计算机辅助几何设计的数学方法. 西安: 西北工业大学出版社, 1986: 7～40

A Description To Conic Method in Geometric Design

Wang Naixin Zhang Gongshun

(Dept of Basic Course, Northwest Agricultural University, Yangling, Shaanxi, China, 712100)

Abstract A new, easy and simple description to conic method in Computer-Aided Geometric Design was advanced thereby to unite all the expressions of the conic equations under the different conditions and restrictions. Thus, the sufficient and necessary conditions of unique existence of conic for the standard situation was obtained. The general equation and the parametric equation of the corresponding conic were deduced in this paper.

Key words Computer-Aided Geometric Design; conic method; computation geometry