

36-40

第20卷 第4期
1992年11月西北农业大学学报
Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalisVol.20 No.4
Nov. 1992

解一元方程的三阶收敛单点迭代法

王乃信

(西北农业大学计算中心, 陕西杨陵·712100)

摘要 提出了求一元方程实根的两点迭代法, 证明了他们的局部收敛性, 并且证明了他们是至少三阶收敛的, 据此构造了一个至少三阶收敛的迭代函数族.

关键词 迭代法, 局部收敛, 收敛阶数

中图分类号 O241.7, TP301.6

本文恒设 $f(x)$ 为实函数.

求一元方程 $f(x) = 0$ 实根的最一般的方法, 是以迭代法为代表的数值解法. 这是因为: 只有极少数的方程才可以用公式或通过有限步骤求解.

求一元方程 $f(x) = 0$ 实根的单点迭代法是指: 构造迭代函数 $\varphi(x)$, 使 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* 恰为 $f(x) = 0$ 的实根, 适当选取初值 x_0 , 由迭代格式

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

产生迭代序列 $\{x_k\}$, 以逐次逼近 x^* : 好的迭代法, 不仅应使迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛

于 x^* , 而且应具有较高的收敛速度. 所谓收敛速度, 是用收敛阶数和渐近误差常数来描述的.

最常用的单点迭代法及其改进有^[1-4]: 简单迭代法, 一阶收敛; Newton 迭代法, 二阶收敛; 弦割迭代法, $1.618\dots (= (1 + \sqrt{5}) / 2)$ 阶收敛; Muller 迭代法, $1.839\dots$ (三次方程 $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$ 的实根) 阶收敛; Steffensen 迭代法, 二阶收敛;

本文将引入求 $f(x) = 0$ 实根的两点迭代法, 并将证明他们局部收敛以及至少三阶收敛, 进而构造一个至少三阶收敛的迭代函数族.

为书写方便, 本文将函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ 等分别简记为 f 及 f' , f'' , f''' 等.

1 两种单点迭代法

设

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x - \frac{2ff'}{2f'^2 - ff''}, \\ \varphi_2(x) &= x - \frac{f}{2f'^3} \cdot \frac{4f'^4 + f^2f''^2}{2f'^2 - ff''}. \end{aligned}$$

文稿收到日期: 1991-10-24.

分别以 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 作为迭代函数, 即可构成求 $f(x)=0$ 实根的两点单点迭代法. 以下将这两种迭代法分别记作 I_1 和 I_2 .

1.1 迭代法 I_1 和 I_2 的局部收敛性

定理 设 x^* 为 $f(x)=0$ 的实根, 且 $f'(x^*) \neq 0$, 又设在 x^* 的某邻域内 $f'''(x)$ 存在且有界, 则迭代法 I_1, I_2 在 x^* 的某邻域内局部收敛.

证明 由于 $f(x^*)=0$, 显然有 $\varphi_1(x^*)=x^*, \varphi_2(x^*)=x^*$. 又由于

$$\begin{aligned}\varphi'_1(x) &= \frac{f^2(3f''^2 - 2f'f''')}{(2f'^2 - ff'')^2}, \\ \varphi'_2(x) &= \frac{f^2(f'f''' - 3f''^2)}{2f'^4} + \frac{2f^2(3f''^2 - 2f'f''')}{(2f'^2 - ff'')^2}.\end{aligned}$$

故知 $\varphi'_1(x^*)=0, \varphi'_2(x^*)=0$. 注意到 $f'''(x)$ 的有界性, 从而在 x^* 的某邻域内恒有 $|\varphi'_1(x)| < 1, |\varphi'_2(x)| < 1$. 根据局部收敛的充分条件^[2], 可得迭代法 I_1, I_2 均在 x^* 的某邻域内局部收敛. 证毕.

1.2 迭代法 I_1 和 I_2 的收敛速度

定理 设 x^* 为 $f(x)=0$ 的实根, 且 $f'(x^*) \neq 0$, 又设在 x^* 的某邻域内 $f^{(5)}(x)$ 存在且有界, 则迭代法 I_1, I_2 至少三阶收敛. 当三阶收敛时, 它们的渐近误差常数分别为

$$C_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)}, \quad C_2 = -\frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

证明 由于 $\varphi'_1(x^*) = \varphi''_1(x^*) = 0, \varphi'_2(x^*) = \varphi''_2(x^*) = 0$,

$$\varphi'''_1(x^*) = \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^2 - \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)}, \quad \varphi'''_2(x^*) = -\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)},$$

又由于 $\varphi'''_1(x), \varphi'''_2(x)$ 在 x^* 点处必连续, 则由 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 所产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 分别满足

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} &= \frac{1}{4} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} = C_1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} &= -\frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} = C_2.\end{aligned}$$

根据收敛阶数和渐近误差常数的定义^[3] 知, 迭代法 I_1, I_2 均至少三阶收敛. 当

三阶收敛时, 其渐近误差常数分别为 C_1 、 C_2 . 证毕.

1.3 据 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 构造的一个至少三阶收敛的迭代函数族

定理 设 x^* 是 $f(x)=0$ 的实根, 且 $f'(x^*) \neq 0$, 又设在 x^* 的某邻域内 $f^{(5)}(x)$ 存在且有界, 则对于任何实常数 λ , 以

$$\varphi_0(x) = \lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_2(x)$$

为迭代函数的迭代法 I_0 至少三阶收敛. 特别是对于每一个确定的 $f(x)$, 如果又有 $f''(x^*) \neq 0$, 并在 x^* 的某邻域内 $f^{(6)}(x)$ 存在且有界, 则存在 λ , 使迭代法 I_0 至少四阶收敛.

证明 由于 $\varphi_0(x^*) = x^*$, $\varphi'_0(x^*) = \varphi''_0(x^*) = 0$,

$$\varphi'''_0(x^*) = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)},$$

故知迭代法 I_0 至少三阶收敛. 对于 $f(x)$, 如果又有 $f''(x^*) \neq 0$, 在 x^* 的某邻域内 $f^{(6)}(x)$ 存在且有界, 从而 $\varphi^{(4)}_0(x)$ 在 x^* 点处连续, 令

$$\lambda = \frac{2f'(x^*)f'''(x^*)}{3(f''(x^*))^2},$$

则有 $\varphi'''_0(x^*) = 0$,

$$\varphi^{(4)}_0(x^*) = \frac{(3(f''(x^*))^2 - 2f'(x^*)f'''(x^*))^2}{(f'(x^*))^3 f''(x^*)} + \frac{4(f'''(x^*))^2 - 3f''(x^*)f^{(4)}(x^*)}{f'(x^*)f''(x^*)}.$$

故知此时迭代法 I_0 至少四阶收敛. 证毕.

2 讨 论

1) 关于高阶收敛单点迭代法的一个著名结果是根据 $f(x)$ 的反函数的 Taylor 展开得到的^[5], 其三阶收敛单点迭代法的迭代函数为

$$\varphi_3(x) = x - \frac{f}{f'} - \frac{f^2 f''}{2f'^3}.$$

这里要指出, 上文中的至少三阶收敛的迭代函数族包含了这一结果. 实际上, 令 $\lambda=2$, 即可得到

$$\varphi_0(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = x - \frac{f}{f'} - \frac{f^2 f''}{2f'^3}.$$

2) 文献 [3] 指出: 设 x^* 是 $f(x)=0$ 的实根, 且 $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$, 则当 $f(x)$ 所涉及的各阶导数连续时, 以

$$\varphi_4(x) = x + \frac{-f' \pm (f'^2 - 2ff'')^{\frac{1}{2}}}{f''}.$$

为迭代函数的迭代法至少三阶收敛, 其中正负号根据 $f'(x)$ 的正负号确定.

对于这一结果, 可以指出如下几点: ① 这种迭代法有两个明显的缺点, 一是前提中要求 $f''(x^*) \neq 0$, 二是迭代时要进行开方运算. 这些缺点是上文中的迭代法完全没有的; ② 迭代函数 $\varphi_4(x)$ 的表达式也有缺点, 致使正负号需要在迭代过程中确定. 克服的方法是将迭代函数改进为

$$\varphi_4(x) = x - \frac{f'}{f''} \left[1 - \left(1 - \frac{2ff''}{f'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

这样就省去了确定正负号的步骤. ③ 设迭代序列为 $\{x_k\}$, 其局部收敛性是显然的, 现将 $f(x)$ 在 x_n 的邻域内作三阶 Taylor 展开:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x - x_n)^3,$$

注意到 $f(x^*) = 0$, 从而有

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x^* - x_n)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta)(x^* - x_n)^3,$$

其中 η 在 x^* 与 x_n 之间, 移项分解得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}f''(x_n) \left\{ x^* - x_n + \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left[1 - \left(1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ & \cdot \left\{ x^* - x_n + \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left[1 + \left(1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ & = -\frac{1}{6}f'''(\eta)(x^* - x_n)^3, \end{aligned}$$

此即

$$\frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} = -\frac{f'''(\eta)}{3f''(x_n) \left\{ x^* - x_n + \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left[1 + \left(1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)^{1/2} \right] \right\}}.$$

由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} = -\frac{1}{6} \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

可见, 该迭代法的收敛阶数和渐近误差常数都与上文中的迭代法 I_2 相同, 因而完全可用迭代法 I_2 取而代之以.

参 考 文 献

- 1 邓建中、葛仁杰、程正兴. 计算方法. 西安: 西安交通大学出版社, 1985: 184~200
- 2 关 治、陈景良. 数值计算方法. 北京: 清华大学出版社, 1990: 508~528
- 3 Phillips G M, Taylor P J. Theory and applications of numerical analysis. Academic Press Inc. (London) Ltd. 1973: 157~178
- 4 Pearson C E. Handbook of applied mathematics. Van Nortrand Reinhold Company. 1974: 1041~1045
- 5 曹志浩、张玉德、李瑞超. 矩阵计算和方程求根. 北京: 人民教育出版社. 1979: 186~200

Some of Third Order Convergent Iterative Methods For Solving Equation of One Variable

Wang Naixin

(Computer Center, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract This paper introduces some of the iterative methods for solving equations of one variable, and proves that these iterative methods have local convergence and third order convergence at least on the basis of which an iterative function family is formed.

Key words iterative method, local convergence, order of convergence