

在第三项系数限制下的 Bieberbach 猜想*

王 乃 信

(西北农学院基础课部)

摘 要

本文证得: 设 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \in S$, 则当 $|a_3| \leq 2.48$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $|a_n| < n$; 又当 $|a_3| \leq 2.6$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有 $|a_n| < n$ 。从而改进了目前已知的最好结果。

一、引 言

为简便计, 本文恒记

$$b_n = |a_n|。$$

1916年, Bieberbach 提出著名的猜想:

若 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \in S$, 则恒有 $b_n \leq n$, 当且仅当 $f(z)$ 为 Koebe 函数及其旋转时, 全部等号成立。

这一猜想极大地刺激了单叶函数理论的发展。然而, 这一猜想至今未被证实。

关于在第三项系数限制下研究 Bieberbach 猜想的工作, 近年来主要进展如下:

1974年, Ehrig^[1]证得: 若 $f(z) \in S$, 则当 $b_3 \leq 1.032$ 时, 对所有 $n \geq 9$, 恒有 $b_n < n$; 又当 $b_3 \leq 2.434$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有 $b_n < n$ 。

1979年, 任福尧^[2]证得: 若 $f(z) \in S$, 则当 $b_3 \leq 1.71$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_n < n$; 又当 $b_3 \leq 2.449$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有 $b_n < n$ 。

1983年, 胡克、邓声南、叶中秋^[3]证得: 若 $f(z) \in S$, 则当 $b_3 < 2.4$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_n < n$; 又当 $b_3 < 2.553$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有 $b_n < n$ 。

本文旨在改进上述最好的结果。

二、引 理

先重述下文要用到的两个已知引理:

引理 1 (胡克^[4]): 若 $f(z) \in S$, 则对任意的自然数 n 和实数 α ($0 < \alpha < 1$),

* 本文蒙任福尧、刘书琴教授多次审阅并提出修改意见, 特致衷心谢意。

恒有

$$(\alpha n^2 b_{n+1}^2)^2 \leq \beta^2 - \left(\frac{1+(n-1)\alpha}{1-\alpha} b_1^2 - \alpha(1-\alpha) b_2^2 \beta \right)^2,$$

$$\text{其中 } \beta = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i+\alpha)^2}{n-i-\alpha} b_{i+1}^2.$$

引理 2 (FitzGerald^[4]): 若 $f(z) \in S$, 则对任意的自然数 n 和实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 恒有

$$\left(\sum_{p=1}^n b_p^2 x_p \right)^2 \leq \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left(\sum_{k=1}^{p+q-1} \beta_k(p, q) b_k^2 \right) x_p x_q,$$

其中 $\beta_k(p, q) = \beta_k(q, p)$, 且当 $p \leq q$ 时,

$$\beta_k(p, q) = \frac{1}{2} (p - |k - q| + |p - |k - q||).$$

引理结果等价于

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n A_{p,q} x_p x_q \geq 0,$$

其中

$$A_{p,q} = \sum_{k=1}^{p+q-1} \beta_k(p, q) b_k^2 - b_p^2 b_q^2.$$

又等价于

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \cdots A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \cdots A_{2,n} \\ \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \cdots A_{n,n} \end{pmatrix}$$

为半正定实对称方阵。

再建立如下引理:

引理 3: 设 $f(z) \in S$. 对某一确定的 m , 如果

$$m^2 - b_m^2 \geq \varepsilon_0 > 0,$$

$$\frac{(m^2 - b_m^2)^2}{A_{m,m}} \geq p_0 > p > 0,$$

则存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{b_n^2}{n^2} < \frac{7}{6(1+p)}.$$

证: 由引理 2 知

$$A_{n,n} A_{m,m} - A_{m,n}^2 \geq 0,$$

故有

$$b_n^4 \leq A_{n,n} + b_n^4 - \frac{A_{n,n}^2}{A_{n,n}}.$$

此即

$$b_n^4 \leq \sum_{k=1}^n k b_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{A_{n,n}^2}{A_{n,n}}.$$

又知当 $n \geq m$ 时,

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= \sum_{k=1}^m k b_{n-m+k}^2 + \sum_{k=m+1}^{2m-1} (2m-k) b_{n-m+k}^2 - b_m^2 b_n^2 \\ &= (m^2 - b_m^2) b_n^2 + \sum_{k=1}^m k (b_{n-m+k}^2 - b_n^2) + \sum_{k=m+1}^{2m-1} (2m-k) (b_{n-m+k}^2 - b_n^2). \end{aligned}$$

注意到, 由叶中秋^[5]的估计式 $-\lambda_1 = -3.394 < b_{n-1} - b_n < 2.945 = \lambda_2$ 可知,

$$A_{n,n} > (m^2 - b_m^2) b_n^2 - C_1 - C_2 b_n,$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda_1 \lambda_2 \sum_{k=1}^m k(m-k)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} (2m-k)(k-m)^2 = 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{k=1}^{m-1} k(m-k)^2, \\ C_2 &= 2\lambda_1 \sum_{k=1}^m k(m-k) + 2\lambda_2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} (2m-k)(k-m) = 2(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{k=1}^{m-1} k(m-k). \end{aligned}$$

易知, 当 $\frac{b_n^2}{n^2} \geq \frac{7}{6(1+p)}$ 时, 有绝对常数 N_0 , 使对所有 $n > N_0$, 恒有

$$A_{n,n} > (m^2 - b_m^2) b_n^2 - C_1 - C_2 b_n > 0.$$

已知有 l_1 , 使对所有 n , 恒有 $b_n \leq l_1 n$. 如果 $l_1^2 < \frac{7}{6(1+p)}$ 则结论显然成立; 如果

$l_1^2 \geq \frac{7}{6(1+p)}$, 则当 $n > N_0$ 且 $\frac{b_n^2}{n^2} \geq \frac{7}{6(1+p)}$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} b_n^4 &\leq l_1^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right) - \frac{A_{n,n}^2}{A_{n,n}} \\ &\leq l_1^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right) - p \cdot \frac{A_{n,n}^2}{(m^2 - b_m^2)^2} \end{aligned}$$

$$< l_1^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right) - p_0 \left(b_n^2 - \frac{C_1 + C_2 l_1 n}{m^2 - b_n^2} \right)^2,$$

$$\frac{b_n^4}{n^4} + p_0 \left(\frac{b_n^2}{n^2} - \frac{C_1 + C_2 l_1 n}{(m^2 - b_n^2) n^2} \right)^2 < l_1^2 \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{6n^2} \right).$$

此式一致地有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^4}{n^4} \leq \frac{7 l_1^2}{6(1+p_0)}.$$

取定满足 $1+p_0 = (1+\varepsilon)^2(1+p)$ 的 $\varepsilon > 0$, 则有绝对常数 M_1 , 使当 $n > M_1$ 时, b_n 或已满足引理结论, 或使

$$\frac{b_n^4}{n^4} \leq \frac{7 l_1^2(1+\varepsilon)}{6(1+p_0)} = \frac{7 l_1^2}{6(1+p)(1+\varepsilon)} = l_1^4 < l_1^4.$$

如果 $l_1^2 < \frac{7}{6(1+p)}$, 则结论显然成立, 如果 $l_1^2 \geq \frac{7}{6(1+p)}$, 则当 $n > 2 M_1$ 且

$$\frac{b_n^2}{n^2} \geq \frac{7}{6(1+p)}$$

时, 恒有

$$\frac{b_n^4}{n^4} + p_0 \left(\frac{b_n^2}{n^2} - \frac{C_1 + C_2 l_1 n}{(m^2 - b_n^2) n^2} \right)^2 < l_1^2 \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{4n^4} (l_1^2 - l_1^2) M_1^2 (M_1 + 1)^2.$$

此式一致地有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^4}{n^4} \leq \frac{7 l_1^2}{6(1+p_0)}.$$

因而, 对于上述 $\varepsilon > 0$, 亦有绝对常数 M_2 , 使当 $n > M_2$ 时, b_n 或已满足引理结论, 或使

$$\frac{b_n^4}{n^4} \leq \frac{7 l_1^2(1+\varepsilon)}{6(1+p_0)} = \frac{7 l_1^2}{6(1+p)(1+\varepsilon)} = l_2^4 < l_1^4.$$

重复以上步骤, 得递减正数列 $\{l_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$,

其中

$$\frac{7 l_k^2}{6(1+p)(1+\varepsilon)} = l_{k+1}^4.$$

与之对应, 有绝对常数列 $\{M_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$, 使当 $n > M_k$ 时, b_n 或已满足引理结论, 或使

$$\frac{b_n^2}{n^2} \leq l_k^2.$$

设 $\{l_k\}$ 的极限为 l , 则

$$l^2 = \frac{7}{6(1+p)(1+\varepsilon)}.$$

故有 s , 使 $l^2 < \frac{7}{6(1+p)}$, 取 $N = M_s$, 则当 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{b_n^2}{n^2} < \frac{7}{6(1+p)}.$$

引理 4: 设 $f(z) \in S$ 。如果对于某个 $n \geq 7$, 有 μ_n 和 p_n , 使

$$A_{3,n} \geq (\mu_n + 3 - b_3^2) b_n^2 > \frac{1}{4}(n-1) A_{3,3},$$

$$(\mu_n + 3 - b_3^2)^2 \geq p_n A_{3,3},$$

则对该 n , 有

$$\begin{aligned} b_n^4 - n b_n^2 - \sum_{k=1}^{n-3} k b_k^2 - \sum_{k=n+3}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{1}{2}(n-3)(b_{n-2}^2 + b_{n+2}^2) \\ - \frac{1}{2}(n-1)\mu_n b_n^2 + p_n b_n^4 \leq 0. \end{aligned}$$

证: 由于 $A_{3,n} = b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 + 3b_n^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 - b_3^2 b_n^2$, 故知

$$b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 = A_{3,n} - 3b_n^2 + b_3^2 b_n^2 \geq \mu_n b_n^2.$$

据引理 2,

$$b_n^4 - \sum_{k=1}^n k b_k^2 - \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 + \frac{A_{3,n}^2}{A_{3,3}} \leq 0.$$

此即

$$b_n^4 - n b_n^2 - \sum_{k=1}^{n-3} k b_k^2 - \sum_{k=n+3}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{1}{2}(n-3)(b_{n-2}^2 + b_{n+2}^2) + Q_n \leq 0,$$

其中

$$Q_n = -\frac{1}{2}(n-1)(b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2) + \frac{A_{3,n}^2}{A_{3,3}}.$$

由于 Q_n 对 $(b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2)$ 的导数为

$$-\frac{1}{2}(n-1) + \frac{2A_{3,n}}{A_{3,3}} \geq -\frac{1}{2}(n-1) + \frac{2}{A_{3,3}}(\mu_n + 3 - b_3^2) b_n^2 > 0,$$

故知 Q_n 为 $(b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2)$ 的增函数。因而,

$$Q_n \geq -\frac{1}{2}(n-1)\mu_n b_n^2 + \frac{1}{A_{3,3}}(\mu_n + 3 - b_3^2)^2 b_n^4$$

$$\geq -\frac{1}{2}(n-1)\mu_n b_n^2 + p_n b_n^4.$$

从而有

$$\begin{aligned} b_n^4 - n b_n^2 - \sum_{k=1}^{n-3} k b_k^2 - \sum_{k=n+3}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{1}{2}(n-3)(b_{n-2}^2 + b_{n+2}^2) \\ - \frac{1}{2}(n-1)\mu_n b_n^2 + p_n b_n^4 \leq 0. \end{aligned}$$

引理 5: 若 $f(z) \in S$, 则对任意的 $t > 0$, 恒有

$$A_{3,n} \geq (9 - b_3^2) b_n^2 + t b_n^2 - T(n, t) n^2,$$

其中 $T(n, t) > 0$, 且

$$\begin{aligned}
T^2(n, t)n^4 = & t^2 \left(\sum_{k=1}^n k b_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 \right) \\
& + t \left(16 \sum_{k=1}^n b_k^2 - 4b_1^2 + 4b_{n+1}^2 \right) \\
& + 40 \sum_{k=1}^n b_k^2 + 6b_1^2 + 12b_2^2 + 2b_3^2 - 2b_{n-1}^2 - 20b_n^2 + 2b_{n+1}^2 \\
& + \left(20 + \frac{32}{t} \right) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{25}{2t} (\lambda_1 + \lambda_2)^2,
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 3.394, \quad \lambda_2 = 2.945.$$

证: 首先,

$$\begin{aligned}
A_{3,n} &= (9 - b_3^2) b_n^2 + t b_n^2 + b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 - (6+t) b_n^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 \\
&\geq (9 - b_3^2) b_n^2 + t b_n^2 - |b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 - (6+t) b_n^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2|.
\end{aligned}$$

其次, 在引理2中, 令 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-3} = 0$, $x_{n-2} = x_{n+2} = 1$, $x_{n-1} = x_{n+1} = 2$, $x_n = -(6+t)$, 则得

$$\begin{aligned}
& (b_{n-2}^2 + 2b_{n-1}^2 - (6+t) b_n^2 + 2b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2)^2 \\
& \leq t^2 \left(\sum_{k=1}^n k b_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 \right)
\end{aligned}$$

$$+ t \left(16 \sum_{k=1}^n b_k^2 - 4b_1^2 + 4b_{n+1}^2 \right)$$

$$+ 40 \sum_{k=1}^n b_k^2 + 6b_1^2 + 12b_2^2 + 2b_3^2 - 2b_{n-1}^2 - 20b_n^2 + 2b_{n+1}^2 + R(n, t),$$

其中

$$\begin{aligned}
R(n, t) &= b_{2n-3}^2 + 6b_{2n-2}^2 + (3-2t) b_{2n-1}^2 - (20+8t) b_{2n}^2 \\
&+ (3-2t) b_{2n+1}^2 + 6b_{2n+2}^2 + b_{2n+3}^2 \\
&= (b_{2n-3}^2 - b_{2n-1}^2) + 6(b_{2n-2}^2 - b_{2n-1}^2) + 10(b_{2n-1}^2 - b_{2n}^2) \\
&+ 10(b_{2n+1}^2 - b_{2n}^2) \\
&+ 6(b_{2n+2}^2 - b_{2n+1}^2) + (b_{2n+3}^2 - b_{2n+1}^2) - 2t b_{2n-1}^2 - 2t b_{2n+1}^2 - 8t b_{2n}^2.
\end{aligned}$$

当 $t > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
R(n, t) &\leq 2\lambda_2(2\lambda_2 + 2b_{2n-1}) + 6\lambda_2(\lambda_2 + 2b_{2n-1}) + 10\lambda_2(\lambda_2 + 2b_{2n}) + 10\lambda_1(\lambda_1 + 2b_{2n}) \\
&+ 6\lambda_1(\lambda_1 + 2b_{2n+1}) + 2\lambda_1(2\lambda_1 + 2b_{2n+1}) - 2t b_{2n-1}^2 - 2t b_{2n+1}^2 - 8t b_{2n}^2 \\
&= 20(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_2 b_{2n-1} + 16\lambda_1 b_{2n+1} + 20(\lambda_1 + \lambda_2) b_{2n}
\end{aligned}$$

$$-2tb_{2n-1}^2 - 2tb_{2n+1}^2 - 8tb_{2n}^2 \\ \leq \left(20 + \frac{32}{t}\right)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{25}{2t}(\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

故得引理结论。

特别地, 若有 $l_0 > 0$, 使对所有 k , 恒有

$$b_k \leq l_0 k,$$

则对任意的 $n \geq 7$ 和 $t > 0$, 恒有

$$T^2(n, t)n^4 \leq \frac{1}{6}l_0^2 t^2 (7n^4 - n^2) \\ + 4l_0^2 t \left(\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 - 1 \right) \\ + 4l_0^2 \left(\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - 5n^2 + 2n + 18 \right) \\ + \left(20 + \frac{32}{t} \right)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{25}{2t}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ \equiv T_0^2(n, t, l_0)n^4,$$

其中 $T_0(n, t, l_0) > 0$ 。从而又有

$$T(n, t) \leq T_0(n, t, l_0).$$

引理 6: 设 $0 < t \leq 4$, $0 < l_0 \leq 1.0657$, 则以上所定义的 $T_0(n, t, l_0)$ 为 l_0 的增函数, 又为 n 的减函数。

证: 由于在 $T_0^2(n, t, l_0)n^4$ 的表达式中, l_0^2 的系数为正数, 故知 $T_0(n, t, l_0)$ 为 l_0 的增函数。

又由于

$$T_0^2(n, t, l_0) = \frac{7}{6}l_0^2 t^2 + \left(\frac{16}{3}l_0^2 t + \frac{40}{3}l_0^2 \right) \frac{1}{n} \\ + \left(-\frac{1}{6}l_0^2 t^2 + 12l_0^2 t \right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{32}{3}l_0^2 t + \frac{44}{3}l_0^2 \right) \frac{1}{n^3} \\ + \left(72l_0^2 + \left(20 + \frac{32}{t} \right)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{25}{2t}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \right) \frac{1}{n^4},$$

其中 $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^4}$ 的系数均为正数, 故知 $T_0(n, t, l_0)$ 为 n 的减函数。

引理 7: 设 $f(z) \in S$, 且有 l_0 ($0 < l_0 \leq 1.0657$), 使对所有 k , 恒有 $b_k \leq l_0 k$ 。

(i) 如果有 t ($0 < t \leq 4$), 使

$$9 - b_3^2 + t - T_0(7, t, l_0) > 0,$$

$$(9 - b_3^2 + t - T_0(7, t, l_0))^2 \geq pA_{3,3} > 0,$$

则对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < n \text{ 或 } \frac{b_n^2}{n^2} \leq \frac{7}{6(1+p)}.$$

(ii) 如果对某个 $n \geq 7$, 有 t ($0 < t \leq 4$), 使

$$9 - b_3^2 + t - T_*(n, t, l_*) > 0,$$

$$(9 - b_3^2 + t - T_*(n, t, l_*))^2 \geq pA_{3,3} > 0,$$

令

$$l_*^2 = \frac{11 + \sqrt{121 + 144l_*^2(1+p)}}{24(1+p)},$$

则对所有 $k \geq n$, 恒有

$$b_k < k \text{ 或 } \frac{b_k^2}{k^2} \leq l_*^2.$$

证:

(i) 若 $l_*^2 \leq \frac{7}{6(1+p)}$ 或 $l_* < 1$, 则结论显然成立。故以下设 $l_*^2 > \frac{7}{6(1+p)}$ 且 $l_* > 1$ 。

首先设 $\frac{7}{6(1+p)} \geq 1$ 。由于当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时,

$$b_n^4 \leq \sum_{k=1}^n k b_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{A_{3,3}^2}{A_{3,3}}$$

$$\leq l_*^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right) - \frac{A_{3,3}^2}{A_{3,3}},$$

$$A_{3,3} \geq (9 - b_3^2) b_n^2 + t b_n^2 - T(n, t) n^2$$

$$\geq (9 - b_3^2 + t - T(n, t)) b_n^2$$

$$\geq (9 - b_3^2 + t - T_*(n, t, l_*)) b_n^2$$

$$\geq (9 - b_3^2 + t - T_*(7, t, l_*)) b_n^2,$$

从而,

$$\frac{A_{3,3}^2}{A_{3,3}} \geq p b_n^4,$$

$$(1+p) b_n^4 \leq l_*^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right),$$

故知, 当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时,

$$\frac{b_n^4}{n^4} < \frac{7l_*^2}{6(1+p)} = l_1^4,$$

其中 $l_1 > 0$ 。容易验证, $l_*^2 > l_1^2 > \frac{7}{6(1+p)} \geq 1$ 。故又知, 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < l_1 n.$$

重复以上步骤, 又得, 当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时,

$$\frac{b_n^4}{n^4} < \frac{7l_1^2}{6(1+p)} \equiv l_2^4,$$

其中 $l_2 > 0$ 。容易验证, $l_1^2 > l_2^2 > \frac{7}{6(1+p)} \geq 1$ 。故又知, 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < l_2 n.$$

依此类推, 得递减正数列 $\{l_r : r = 0, 1, 2, \dots\}$, 其中

$$\frac{7l_r^2}{6(1+p)} \equiv l_{r+1}^4,$$

且对任意的 r , 当 $n \geq 7$ 时, 恒有 $b_n < l_r n$ 。注意到

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l_r^2 = \frac{7}{6(1+p)},$$

因而, 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$\frac{b_n^2}{n^2} \leq \frac{7}{6(1+p)}.$$

其次, 当 $\frac{7}{6(1+p)} < 1$ 时, 设 l_n 是 $\{l_r\}$ 中第一个小于 1 的项, 则当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时, 可得 $b_n < l_n n$ 。从而又知, 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < n.$$

(ii) 若 $l_n^2 \leq l_n^2$ 或 $l_n < 1$, 则结论显然成立。故以下设 $l_n^2 > l_n^2$ 且 $l_n \geq 1$ 。

首先设 $l_n^2 \geq 1$ 。当 $k \geq n$ 而 $b_k \geq k$ 时,

$$A_{3,k} \geq (9 - b_n^2 + t - T_n(n, t, l_n)) b_k^2,$$

$$\frac{A_{3,k}^2}{A_{3,3}} \geq p b_k^4,$$

$$(1+p) b_k^4 \leq l_n^2 \left(\frac{7}{6} k^4 - \frac{1}{6} k^2 \right),$$

从而,

$$\frac{b_k^4}{k^4} < \frac{7l_n^2}{6(1+p)} \equiv l_1^4,$$

其中 $l_1 > 0$ 。容易验证, $l_n^2 > l_1^2 > l_n^2 \geq 1$ 。故又知, 对所有 $k \geq n$, 恒有

$$b_k < l_1 k.$$

重复以上步骤, 又得, 当 $k \geq n$ 而 $b_k \geq k$ 时,

$$(1+p) b_k^4 \leq l_1^2 \left(\frac{7}{6} k^4 - \frac{1}{6} k^2 \right) + \frac{1}{4} (l_n^2 - l_1^2) n^2 (n-1)^2$$

$$< \left(\frac{11}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} l_n^2 \right) k^4,$$

从而,

$$\frac{b_k^4}{k^4} < \frac{11l_1^2 + 3l_n^2}{12(1+p)} \equiv l_2^4,$$

其中 $l_2 > 0$ 。容易验证, $l_1^2 > l_2^2 > l_n^2 \geq 1$ 。故又知, 对所有 $k \geq n$, 恒有

$$b_k < l_2 k.$$

依此类推, 得递减正数列 $\{l_r : r = 0, 1, 2, \dots\}$, 其中

$$\frac{11l_r^2 + 3l_{r+1}^2}{12(1+p)} \equiv l_{r+1}^2,$$

且对任意的 r , 当 $k \geq n$ 时, 恒有 $b_k < l_r k$. 注意到

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l_r^2 = l_*^2,$$

因而, 对所有 $k \geq n$, 恒有

$$\frac{b_k^2}{k^2} \leq l_*^2.$$

其次, 当 $l_*^2 < 1$ 时, 设 l_s 是 $\{l_r\}$ 中第一个小于 1 的项, 则当 $k \geq n$ 而 $b_k \geq k$ 时, b_k 必小于 $l_s k$. 从而又知, 对所有 $k \geq n$, 恒有

$$b_k < k.$$

三、定 理

定理 1: 设 $f(z) \in S$, 则当

$$b_3 \leq 2.6$$

时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$b_n < n.$$

证: 首先指出, 若令

$$P_{n+1}^2(\alpha, b_2, b_3, \dots, b_n) = \beta_n^2 - \left(\frac{1 + (n-1)\alpha}{1-\alpha} b_n^2 - \alpha(1-\alpha)b_2^2\beta_n \right)^2,$$

其中 $P_{n+1}^2(\alpha, b_2, b_3, \dots, b_n) > 0$, $0 < \alpha < 1$,

$$\beta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i+\alpha)^2}{n-i-\alpha} b_{i+1}^2 = \beta_n^* + \frac{(1+(n-1)\alpha)^2}{1-\alpha} b_n^2,$$

则 $P_{n+1}^2(\alpha, b_2, b_3, \dots, b_n)$ 恒为 $b_3, \dots, b_n$ 的增函数, 这是因为, 当 $3 \leq i+1 \leq n-1$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d(b_{i+1}^2)} P_{n+1}^2(\alpha, b_2, b_3, \dots, b_n) \\ &= 2[1 - \alpha^2(1-\alpha)^2 b_2^4] \frac{(n-i+\alpha)^2}{n-i-\alpha} \beta_n \\ &+ 2\alpha(1-\alpha)b_2^2 \frac{(n-i+\alpha)^2}{n-i-\alpha} \frac{1+(n-1)\alpha}{1-\alpha} b_n^2 > 0, \\ & \frac{d}{d(b_n^2)} P_{n+1}^2(\alpha, b_2, b_3, \dots, b_n) \\ &= 2[1 - \alpha^2(1-\alpha)^2 b_2^4] \cdot \frac{(1+(n-1)\alpha)^2}{1-\alpha} \beta_n^* \end{aligned}$$

$$+ 2[(1 + (n-1)\alpha)^2 - (\alpha(1-\alpha)b_2^2(1 + (n-1)\alpha) - 1)^2] \frac{(1 + (n-1)\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} b_n^2 \\ + 2\alpha(1-\alpha)b_2^2 \frac{1 + (n-1)\alpha}{1-\alpha} \beta_n^* > 0.$$

故由引理 1 知, 当 $b_3 \leq B_3$, $b_4 \leq B_4$, $\dots$, $b_n \leq B_n$ 时

$$b_{n+1}^2 \leq \frac{1}{\alpha n^2} P_{n+1}(\alpha, b_2, B_3, \dots, B_n).$$

已知

$$b_3 \leq 2.6 \equiv B_3.$$

由于 $b_2^2 \leq b_3 + 1$, 又由于 Hamilton 已证得: 当 $b_2 < 1.8$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有 $b_n < n$, 故以下设

$$3.24 \leq b_2^2 \leq 3.6.$$

令 $\alpha_4 = 0.37459$, 经验证, $P_4(\alpha_4, b_2, B_3)$, 为 b_2 的减函数, 即当 $b_2 = b_2^* = 1.8$ 时达到最大值, 故知

$$b_4^2 \leq \frac{1}{9\alpha_4} P_4(\alpha_4, b_2^*, B_3) = 13.19452 \equiv B_4^2.$$

又令 $\alpha_5 = 0.34960$, 注意到

$$A_{3,3} \leq C(b_2) + 3b_3^2 - b_3^4,$$

其中

$$C(b_2) = 1 + 2b_2^2 + \frac{2}{9\alpha_4} P_4(\alpha_4, b_2, B_3) + \frac{1}{16\alpha_5} P_5(\alpha_5, b_2, B_3, B_4).$$

经验证, $C(b_2)$ 为 b_2 的减函数, 即当 $b_2 = b_2^* = 1.8$ 时达到最大值, 故知

$$C(b_2) \leq 1 + 2b_2^{*2} + \frac{2}{9\alpha_4} P_4(\alpha_4, b_2^*, B_3) + \frac{1}{16\alpha_5} P_5(\alpha_5, b_2^*, B_3, B_4) \\ = 55.41392 \equiv C.$$

因而又有

$$A_{3,3} \leq C + 3b_3^2 - b_3^4 \equiv h(b_3).$$

又注意到

$$\frac{d}{d(b_3^2)} \frac{(9 - b_3^2)^2}{h(b_3)} = \frac{9 - b_3^2}{h^2(b_3)} (15b_3^2 - 2C - 27) < 0,$$

故知

$$\frac{(9 - b_3^2)^2}{A_{3,3}} \geq \frac{(9 - b_3^2)^2}{h(b_3)} \geq \frac{(9 - B_3^2)^2}{h(B_3)} = 0.16727 > \frac{1}{6}.$$

从而, 由引理 3 (其时 $m = 3$) 知, 当 $b_3 \leq 2.6$ 时, 存在着绝对常数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{b_n^2}{n^2} < \frac{7}{6(1 + \frac{1}{6})} = 1.$$

证毕。

定理 2: 设 $f(z) \in S$, 则当

$$b_3 \leq 2.48$$

时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < n.$$

证: 由于胡克^[3]已证得: 当 $b_3 < 2.4$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_n < n$, 故以下设

$$2.4 \leq b_3 \leq 2.48 = B_3.$$

由于 $b_2^2 \leq b_3 + 1$, 又由于我们已证得: 当 $b_2 \leq 1.7$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_n < n$, 故以下设

$$2.89 \leq b_2^2 \leq 3.68 = B_2^2.$$

令 $\alpha^* = 0.36384$, 经验证, $P_4(\alpha^*, b_2, B_3)$ 当 $b_2 = b_2^* = 1.71085$ 时达到最大值, 故知

$$b_4^2 \leq \frac{1}{9\alpha^*} P_4(\alpha^*, b_2^*, B_3) = 12.38295 = B_4^2.$$

又令 $\alpha_4 = 0.37165$, $\alpha_5 = 0.34024$, 经验证,

$$C(b_2) = 1 + 2b_2^2 + \frac{2}{9\alpha_4} P_4(\alpha_4, b_2, B_3) + \frac{1}{16\alpha_5} P_5(\alpha_5, b_2, B_3, B_4)$$

当 $b_2 = b_2^* = 1.76343$ 时达到最大值, 故知

$$\begin{aligned} C(b_2) &\leq 1 + 2b_2^{*2} + \frac{1}{9\alpha_4} P_4(\alpha_4, b_2^*, B_3) + \frac{1}{16\alpha_5} P_5(\alpha_5, b_2^*, B_3, B_4) \\ &= 52.40546 = C. \end{aligned}$$

因而又有

$$A_{3,3} \leq C + 3b_3^2 - b_3^4 = h(b_3) \leq 36.50786.$$

以下分三步证明:

(1) 已知有 l_0 ($0 < l_0 \leq 1.0657$), 使对所有 k , 恒有 $b_k \leq l_0 k$. 此时, 对任意的 t ($0 < t \leq 4$) 和 n ($n \geq 7$),

$$T(n, t) \leq T_0(n, t, l_0).$$

据引理 6 知, $T_0(n, t, l_0)$ 为 l_0 的增函数, 又为 n 的减函数. 令 $l = 1.0657$, 则当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时,

$$\begin{aligned} A_{3,n} &\geq (9 - b_3^2 + t - T(n, t)) b_n^2 \\ &\geq (9 - b_3^2 + t - T_0(n, t, l_0)) b_n^2 \\ &\geq (9 - b_3^2 + t - T_0(7, t, l)) b_n^2. \end{aligned}$$

若取 $t = t^* = 2.09614$, 则

$$T_0(7, t^*, l) = 3.30425,$$

从而, 当 $2.4 \leq b_3 \leq 2.48 = B_3$ 时,

$$\begin{aligned} A_{3,n} &\geq (9 - b_3^2 + t^* - T_0(7, t^*, l)) b_n^2 \\ &\geq (7.79189 - B_3^2) n^2 \geq 1.64149 n^2 \\ &> \frac{1}{4} (n-1) A_{3,3}. \end{aligned}$$

由此可知, 当 $n \geq 7$ 而 $b_n \geq n$ 时, 适当选取 t ($0 < t \leq 4$), 总可使其满足引理 4 和引理 7

的条件。例如, 选取 t ($0 < t \leq 4$), 使 $t - T_0(n, t, l_0)$ 达到最大值即可。最大值的存在是显然的, 因为, 当 $0 < t \leq 4$ 时, $t - T_0(n, t, l_0)$ 为 t 的连续函数, 且

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t - T_0(n, t, l_0)) = -\infty.$$

(2) 以下恒设

$$1 \leq l_0 \leq 1.0657.$$

此时, 对所有 $n \geq 7$ 和 $t > 0$,

$$T_0^2(n, t, l_0) n^4 > l_0^2 t^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 \right) > t^2 n^4,$$

$$T_0(n, t, l_0) > t_0.$$

设对某个 $n \geq 7$, 已选取 $t = t_n$ ($0 < t_n \leq 4$), 使 $9 - B_3^2 + t_n - T_0(n, t_n, l_0) > 0$, 则当 $2.4 \leq b_3 \leq 2.48 = B_3$ 时, 恒有 $9 - b_3^2 + t_n - T_0(n, t_n, l_0) > 0$ 。令

$$r_n^2 = 9 + t_n - T_0(n, t_n, l_0),$$

则 $r_n^2 < 9$, 且

$$(9 - b_3^2 + t_n - T_0(n, t_n, l_0))^2 \geq \frac{(r_n^2 - b_3^2)^2}{h(b_3)} A_{3,30}.$$

容易判定,

$$\frac{(r_n^2 - b_3^2)^2}{h(b_3)} = \frac{(9 - b_3^2)^2}{h(b_3)} \left(1 - \frac{9 - r_n^2}{9 - b_3^2} \right)^2$$

也为 b_3 的减函数, 因而,

$$(9 - b_3^2 + t_n - T_0(n, t_n, l_0))^2 \geq \frac{(r_n^2 - B_3^2)^2}{h(B_3)} A_{3,30}.$$

若已选取 $t = t_7$ ($0 < t_7 \leq 4$), 使 $r_7^2 - B_3^2 > 0$, 令

$$\frac{(r_7^2 - B_3^2)^2}{h(B_3)} = p,$$

则根据引理 7 之 (i), 对所有 $n \geq 7$, 恒有

$$b_n < n \text{ 或 } \frac{b_n^2}{n^2} \leq \frac{7}{6(1+p)}.$$

今用此法, 从 $l_0 = 1.0657$ 开始进行迭代:

l_0^2	t_7	p	$\frac{7}{6(1+p)}$
1.13572	2.09614	0.08158	1.0786699
1.07867	2.37849	0.09021	1.0701334
1.07014	2.43028	0.09163	1.0687383
1.06874	2.43908	0.09187	1.0685060
1.06851	2.44054	0.09191	1.0684677

由此得: 当 $n \geq 7$ 时, 恒有

$$\frac{b_n^2}{n^2} < 1.06847.$$

又若对某个 $n \geq 7$, 已选取 t_n ($0 < t_n \leq 4$), 使 $r_n^2 - B_3^2 > 0$, 令

$$\frac{(r_n^2 - B_3^2)^2}{h(B_3)} = p,$$

则根据引理 7 之(ii), 对所有 $k \geq n$, 恒有

$$b_k < k \text{ 或 } \frac{b_k^2}{k^2} \leq l^2 = \frac{11 + \sqrt{121 + 144l^2(1+p)}}{24(1+p)}.$$

今对 $l^2 = 1.06847$, $n = 31$, 选取 $t_{31} = 1.13848$, 则得

$$p = 0.184836, l^2 = 0.999276.$$

由此又知, 当 $k \geq 31$ 时, 恒有

$$b_k < k.$$

(3) 假设定理结论不真, 则必有满足 $7 \leq n \leq 30$ 的 n , 使 $b_n \geq n$, 且当 $k > n$ 时, 恒有 $b_k < k$.

注意到, 当

$$b_k < \begin{cases} l \cdot k & k \leq n, \\ k, & k > n \end{cases}$$

时, 对任意的 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} T^2(n, t) n^4 &< t^2 \left(\frac{7}{6} n^4 - \frac{1}{6} n^2 + \frac{1}{4} (l^2 - 1) n^2 (n+1)^2 \right) \\ &+ t \left(\frac{8}{3} l^2 n(n+1)(2n+1) - 4l^2 + 4(n+1)^2 \right) \\ &+ \frac{20}{3} l^2 n(n+1)(2n+1) + 72l^2 - 2l^2(n-1)^2 - 20l^2 n^2 \\ &+ 2(n+1)^2 + \left(20 + \frac{32}{t} \right) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{25}{2t} (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ &\equiv T_1^2(n, t, l_0) n^4, \end{aligned}$$

其中 $T_1(n, t, l_0) > 0$ 。显然, 此时也有

$$T(n, t) < T_1(n, t, l_0).$$

令 $l^2 = 1.06847$, 设对 n ($7 \leq n \leq 30$) 已选取 $t_n > 0$, 使当 $2.4 \leq b_3 \leq 2.48 \equiv B_3$ 时, 恒有

$$r_n^2 - b_3^2 = 9 - b_3^2 + t_n - T_1(n, t_n, l_0) > \frac{n-1}{4n^2} h(b_3),$$

再令

$$6 + t_n - T_1(n, t_n, l_0) = \mu_n,$$

$$\frac{(r_n^2 - B_3^2)^2}{h(B_3)} = p_n,$$

则当 $b_n \geq n$ 时,

$$\begin{aligned} A_{3,n} &\geq (r_n^2 - b_3^2) b_n^2 = (\mu_n + 3 - b_3^2) b_n^2 \\ &> \frac{1}{4} (n-1) h(b_3) \frac{b_n^2}{n^2} \geq \frac{1}{4} (n-1) A_{3,3}, \end{aligned}$$

$$(r_n^2 - b_3^2)^2 = (\mu_n + 3 - b_3^2)^2 \geq \frac{(r_n^2 - B_3^2)^2}{h(B_3)} h(b_3) \geq p_n A_{3,3}.$$

故由引理 4 知, 当 $b_n \geq n$ 时,

$$\begin{aligned} b_n^4 - nb_n^2 - \sum_{k=1}^{n-3} k b_k^2 - \sum_{k=n+3}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - \frac{1}{2}(n-3)(b_{n-2}^2 + b_{n+2}^2) \\ - \frac{1}{2}(n-1)\mu_n b_n^2 + p_n b_n^4 \leq 0. \end{aligned}$$

由此式又知

$$\begin{aligned} (1 + p_n) \frac{b_n^4}{n^4} - \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n^2} \mu_n \right) \frac{b_n^2}{n^2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{26}{3n^2} + \frac{8}{n^3} - \frac{d}{n^4} \right) \\ - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + \frac{23}{4n^2} - \frac{7}{n^3} + \frac{3}{n^4} \right) (1.2 + 1) < 0, \end{aligned}$$

其中

$$d = 1.2(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) - 1 - 2B_2^2 - 3B_3^2 - 4B_4^2 = 30.904.$$

这是关于 $\frac{b_n^2}{n^2}$ 的二次不等式, 其解形如: $\frac{b_n^2}{n^2} < L_n^2$ 。

当 $b_n \geq n$ 时, 必有 $L_n^2 > 1$, 从而又必有

$$\begin{aligned} G(n) \equiv p_n - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + \frac{23}{4n^2} - \frac{7}{n^3} + \frac{3}{n^4} \right) (1.2 + 1) \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} + \frac{26}{3n^2} - \frac{8}{n^3} + \frac{d}{n^4} - \frac{n-1}{2n^2} \mu_n < 0. \end{aligned}$$

简言之, 假设定理结论不真, 则必有满足 $7 \leq n \leq 30$ 的 n , 使 $G(n) < 0$ 。

我们对满足 $7 \leq n \leq 30$ 的所有 n , 分别适当地选取 $t_n > 0$, 求出相应的 μ_n , p_n 和 $G(n)$:

n	t_n	μ_n	p_n	$G(n)$
7	2.85131	4.94932	0.09798	0.022626
8	2.61903	5.06927	0.11148	0.010848
9	2.44596	5.15885	0.12213	0.004949
10	2.31023	5.22865	0.13077	0.002065
11	2.19953	5.28480	0.13793	0.000825
12	2.10648	5.33114	0.14398	0.000520
13	2.02645	5.37016	0.14918	0.000762
14	1.95636	5.40356	0.15370	0.001327
15	1.89411	5.43255	0.15768	0.002082
16	1.83819	5.45800	0.16122	0.002946
17	1.78749	5.48055	0.16439	0.003867
18	1.74116	5.50071	0.16724	0.004812
19	1.69857	5.51887	0.16984	0.005762

20	1.65920	5.53532	0.17221	0.006702
21	1.62263	5.55032	0.17438	0.007625
22	1.58852	5.56406	0.17638	0.008524
23	1.55659	5.57671	0.17824	0.009398
24	1.52661	5.58839	0.17996	0.010244
25	1.49837	5.59923	0.18156	0.011062
26	1.47171	5.60931	0.18306	0.011851
27	1.44649	5.61873	0.18446	0.012613
28	1.42256	5.62754	0.18578	0.013347
29	1.39982	5.63581	0.18702	0.014055
30	1.37817	5.64360	0.18820	0.014738

此结果与假设的推论相矛盾, 从而否定假设, 确认定理结论。
证毕。

四、附 记

上文定理 2 的证明中提及, 我们已经证得: 设 $f(z) \in S$, 则当 $b_2 \leq 1.7$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_n < n$ 。证明摘要如下:

首先, 若对某个 $n \geq 7$, 有 μ_n 和 p_n , 使

$$A_{2,n} \geq (\mu_n + 2 - b_2^2) b_n^2 > \frac{1}{2} (n-1) A_{2,n},$$

$$(\mu_n + 2 - b_2^2)^2 \geq p_n A_{2,n},$$

则对该 n , 有

$$b_n^4 - n b_n^2 - \sum_{k=1}^{n-2} k b_k^2 - \sum_{k=n+2}^{2n-1} (2n-k) b_k^2 - (n-1) \mu_n b_n^2 + p_n b_n^4 \leq 0.$$

其次,

$$A_{2,n} \leq 1 + 2b_2^2 + B_3^2 - b_2^4 = h(b_2),$$

其中 B_3 为 b_2 的函数, 定义为

$$\begin{cases} b_2 = 2(1+\lambda)e^{-\lambda}, \\ B_3 = 2e^{-2\lambda} + 4\lambda(1+\lambda)e^{-2\lambda} + 1, \end{cases} \quad \lambda \geq 0.$$

设 $r^2 \leq 4$, 则当 $b_2^2 \leq r^2$ 时, $\frac{(r^2 - b_2^2)^2}{h(b_2)}$ 恒为 b_2 的减函数。最后, 设对所有 k , 恒有 $b_k \leq l_0 k$, $-\lambda_1 < b_{k-1} - b_k < \lambda_2$, 令 $T_0(n, t, l_0) > 0$, 且

$$T_0^2(n, t, l_0) n^4 = \frac{1}{6} l_0^2 t^2 (7n^4 - n^2) + \frac{2}{3} l_0^2 (t+1)n(n+1)(2n+1)$$

$$+ 2l_0^2 - 2l_0^2 n^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2t}.$$

若有 $t (0 < t \leq 2)$, 使

$$4 - b_2^2 + t - T_0(7, t, l_0) > 0,$$

$$(4 - b_2^2 + t - T_0(7, t, l_0))^2 \geq p A_{2,2} > 0,$$

则当 $n \geq 7$ 时,

$$b_1 < n \text{ 或 } \frac{b_1^2}{n^2} \leq \frac{7}{6(1+p)}.$$

若对某个 $n \geq 7$, 有 $t (0 < t \leq 2)$, 使

$$4 - b_2^2 + t - T_0(n, t, l_0) > 0,$$

$$(4 - b_2^2 + t - T_0(n, t, l_0))^2 \geq p A_{2,2} > 0,$$

则当 $k \geq n$ 时,

$$b_1 < k \text{ 或 } \frac{b_1^2}{k^2} \leq \frac{11 + \sqrt{121 + 144l_0^2(1+p)}}{24(1+p)}.$$

据此可得: 当 $b_2 \leq 1.7$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_1 < n$. 这一结论也改进了胡克^[3]的相应结果: 当 $b_2 < 1.68$ 时, 对所有 $n \geq 7$, 恒有 $b_1 < n$.

参 考 文 献

- [1] Ehlig, G.: Math. Z., 140(1974), 111-126.
- [2] 任福尧: 《中国科学》, 数学专辑(I) (1979), 275-280.
- [3] 胡克、邓声南、叶中秋: 《科学通报》, 28(1983), 3:189.
- [4] FitzGerald, C. H.: Arch. Rat. Mech. Anal., 46(1972), 356-368.
- [5] 叶中秋: 《数学研究与评论》, 4(1984), 2:118.

The Bieberbach Conjecture with the Third Coefficient Restricted

Wang Naixin

(Northwestern College of Agriculture)

Abstract

We obtain the following main results:

Let $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$ be regular and univalent in $|z| < 1$. If $|a_3| \leq 2.48$, then $|a_n| < n$ for all $n \geq 7$. If $|a_3| \leq 2.6$, then there exists an absolute constant N such that $|a_n| < n$ for all $n > N$.

Thus, the best results that we have ever known to date in [3] have been well improved.