

用八结点退化三角形等参数奇异性单元 计算应力强度因子 K_I

黄松梅 刘恩锡

(西北农学院西安水利水电科研所)

提 要

本文通过对奇异性的讨论及计算实践指出:如适当地划分网格,用退化三角形奇异单元可以较准确地求得缝顶单元的位移和应力,克服四边形奇异单元 \bar{K}_I-r 曲线在缝顶单元弯曲下降的缺点。推求了用缝顶单元结点位移计算 K_I 的公式。用这一方法对已有解析解答的典型问题进行了 K_I 值的计算,计算结果和解析解答良好的吻合。并将这一方法应用于结构形状比较复杂的结构,对于有凹角的裂缝体除缝顶外在凹角处采用奇异单元可以提高计算 K_I 的精度。

在线弹性断裂力学中计算应力强度因子是主要任务之一,其中平面张开型的应力强度因子 K_I 是常用的。对于任意结构型式和裂缝形状的构件,用有限单元法确定应力强度因子是最为有效的方法。使用常应变的三角形单元来计算应力强度因子,需要划分尺寸很小的单元,求解上千个联立方程式,且收敛性很慢,常得不到满意的结果。近几年来,许多研究者相继提出了符合缝顶应力、应变分布规律的奇异性单元,用有限单元法计算 K_I 取得了良好的结果。方法之一是用八结点四边形等参数奇异性单元,即将缝顶单元边界中间结点移至靠近缝顶的边长 $1/4$ 处,这时缝顶应力、应变将得到应有的 $r^{-1/2}$ 的奇异性。当四边形的一条边成为一点时就成为退化三角形奇异性单元。这一方法是1973年Henshell^[1]等提出的,在这之后一些文献介绍了用四边形奇异单元及退化三角形奇异单元的计算结果,并讨论了奇异性单元的奇异性。但这些文献对四边形和退化三角形两种奇异单元没有进行深入的比较。

本文在讨论四边形和退化三角形奇异性的基础上,通过计算实践比较了用四边形和退化三角形奇异性单元计算 K_I 的结果。计算表明如适当地划分网格用退化三角形奇异性单元,能较准确地求得缝顶单元的位移和应力,可以克服四边形奇异性单元 \bar{K}_I-r 曲线在缝顶单元弯曲下降的缺点。这样,就可以不用 \bar{K}_I-r 曲线外推求 K_I 值,而可以直接用缝顶单元的结点位移来计算 K_I 。我们推求了用缝顶单元结点位移值求 K_I 的公式。用这一方法计算了紧凑拉伸、双边裂缝、三点弯曲、中心裂缝和单边裂缝等平板裂缝体的 K_I 值,计算结果和已有的解析解答良好的吻合。还讨论了网格尺寸对 K_I 值的影响。并将这一方法用来计算有裂缝的大头坝的应力强度因子,除缝顶布置奇异性单元外,凹角处也布置奇异性单元获得了比较好的计算结果。

一、平面裂缝体缝顶应力奇异性的特点

在弹性力学平面问题中可以用艾雷应力函数 Φ 来求解。对于平面裂缝体 1957 年 Williams^[2] 采用下述无穷级数作为应力函数(下面只列出了相应于 I 型裂缝体的部分)。

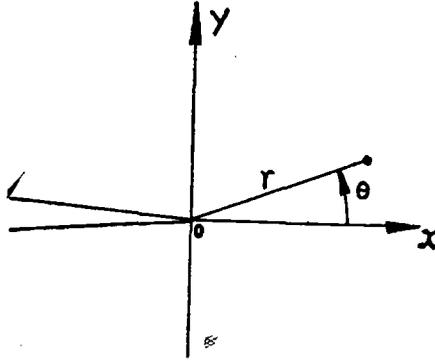


图 1

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} C_j r^{\frac{j}{2}+1} \left[-\cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta + \frac{\frac{j}{2}+(-1)^j}{\frac{j}{2}+1} \cos\left(\frac{j}{2}+1\right)\theta \right] \quad (1)$$

根据应力函数可以求得各应力分量及位移分量。

$$\sigma_{yy} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2} C_j r^{\frac{j}{2}-1} \left\{ \left[\frac{j}{2}-2+(-1)^j \right] \cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{j}{2}-1\right) \cos\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2} C_j r^{\frac{j}{2}-1} \left\{ - \left[\frac{j}{2}+2+(-1)^j \right] \cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{j}{2}-1\right) \cos\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta \right\} \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2} C_j r^{\frac{j}{2}-1} \left\{ \left[\frac{j}{2}+(-1)^j \right] \sin\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{j}{2}-1\right) \sin\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta \right\} \quad (4)$$

$$2Gu = \sum_{j=1}^{\infty} C_j r^{\frac{j}{2}} \left\{ -\left[k + \frac{j}{2} + (-1)^j \right] \cos \frac{j}{2} \theta + \frac{j}{2} \cos \left(\frac{j}{2} - 2 \right) \theta \right\} \quad (5)$$

$$2Gv = \sum_{j=1}^{\infty} C_j r^{\frac{j}{2}} \left\{ -\left[k - \frac{j}{2} - (-1)^j \right] \sin \frac{j}{2} \theta - \frac{j}{2} \sin \left(\frac{j}{2} - 2 \right) \theta \right\} \quad (6)$$

(1)-(6) 式中, r 、 θ 参见图 1, C_j 是常系数与裂缝体的形状和荷载有关, G 是剪切应力模量, $K = 3 - 4\mu$ (平面应变), 或 $K = (3 - \mu) / (1 + \mu)$ (平面应力), μ 是波桑比。

对 σ_{ij} 和 u, v , 当 $r \ll a$ (a 为裂缝长), 取 $j = 1$ 的主项则得:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (9)$$

$$u = \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (10)$$

$$v = \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2k + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (11)$$

K_I 和 C_1 的关系是 $K_I = -C_1 \sqrt{2\pi}$, K_I 是张开型裂纹体的应力强度因子, 它们的定义是

$$K_I = \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{2\pi X} \sigma_{yy}(X, 0) \quad (13)$$

或
$$K_I = \frac{2G}{k+1} \sqrt{2\pi} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{v(X, 0)}{\sqrt{-X}} \quad (14)$$

从 (7)-(9) 可以看出缝顶应力在 θ 为任意值时均具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性, 从而各应变分量也具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。

二、退化三角形和四边形奇异单元的奇异性

八节点四边形等参数元法的基本公式可参见有关著作^[3], 当用等参数元法计算 K_I 时缝顶单元可划分为矩形奇异单元如图 2, 或划分为退化三角形奇异性单元如图 3(a) 及 3(b)。

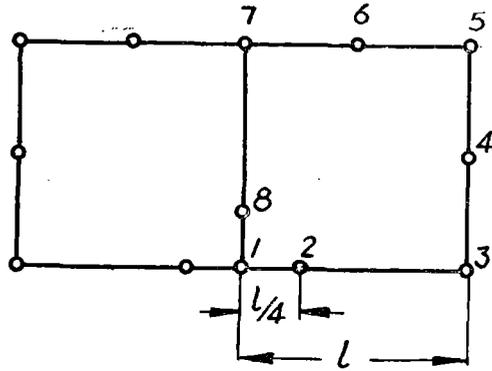
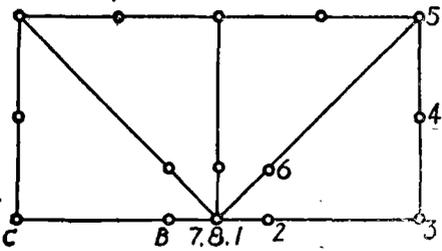
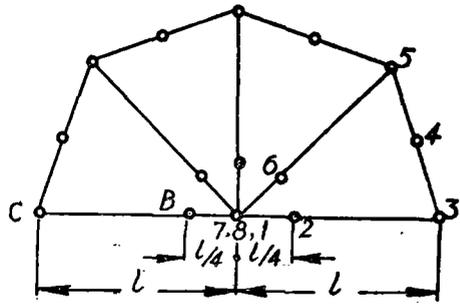


图2 矩形奇异单元



(a)



(b)

图3 退化三角形奇异单元

对退化三角形奇异单元, Barsoum^[4] 证明了通过缝顶的任一射线都得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A_0}{\sqrt{r}} + A_1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B_0}{\sqrt{r}} + B_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{C_0}{\sqrt{r}} + C_1 \tag{17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{D_0}{\sqrt{r}} + D_1 \tag{18}$$

(15)–(18) 式中 A_0 、 A_1 、 B_0 、 B_1 、 C_0 、 C_1 、 D_0 、 D_1 都是和 r 无关的常数。故采用退化三角形奇异性单元时, 应变及应力均具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。

对于矩形奇异性单元, Barsoum^[6] 只证明了通过缝顶的二条边界应变具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。文献〔7〕讨论过矩形奇异单元内部应变的奇异性, 但只涉及应变表达式的分

母部分,似不完整。下面我们以正方形奇异性单元的对角线为例推导其应变表达式,来讨论单元内的射线是否具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。

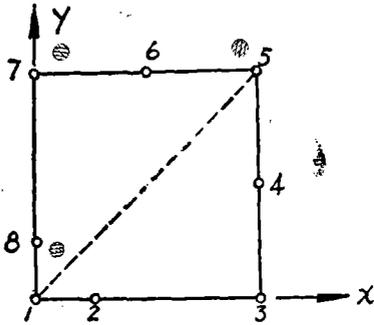


图4 整体坐标(实际单元)

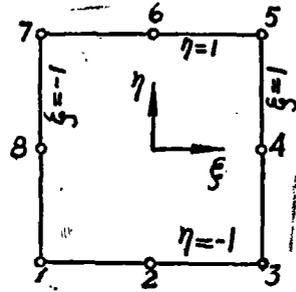


图5 局部坐标(标准单元)

八结点四边形等参数元素由局部座标变换到整体坐标的变换式是(参见图4、5)

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i \\
 Y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Y_i
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

位移的变换式是

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

N_i 是插值函数,其表达式是

$$\begin{aligned}
 N_i(\xi, \eta) &= [(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) - (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \\
 &\quad - (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)] \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 \\
 &\quad + (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1-\xi_i^2) \eta^2 / 2 \\
 &\quad + (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)(1-\eta_i^2) \xi^2 / 2
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

以 $X_1 = X_7 = X_8 = 0, X_2 = L/4, X_3 = X_4 = X_5 = L, X_6 = L/2,$

$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0, Y_4 = L/2, Y_5 = Y_6 = Y_7 = L, Y_8 = L/4,$

代入(1)式得

$$X = L/8(1+\xi)(-\eta\xi + \xi + \eta + 3)
 \tag{22}$$

$$Y = L/8 (1 + \eta) (-\xi \eta + \eta + \xi + 3)$$

在对角线上 $X = Y$, $\xi = \eta$ 得

$$\begin{aligned} X &= L/8 (1 + \xi)^2 (3 - \xi) \\ Y &= L/8 (1 + \xi)^2 (3 - \xi) \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{2} L}{8} (1 + \xi)^2 (3 - \xi)$$

$$\sqrt{r} = 0.42 \sqrt{L} (1 + \xi) \sqrt{3 - \xi} \quad (24)$$

当 $\xi = \eta$ 时雅可比矩阵变换式是

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{4} (1 + \xi) (2 - \xi) & \frac{L}{8} (1 - \xi)^2 \\ \frac{L}{8} (1 - \xi^2) & \frac{L}{4} (1 + \xi) (2 - \xi) \end{pmatrix} \quad (25)$$

其逆阵

$$[J]^{-1} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \frac{8}{L (1 + \xi)^2 (5 - 3\xi) (3 - \xi)} \begin{pmatrix} 2(2 - \xi)(1 - \xi) & -(1 + \xi)(1 - \xi) \\ -(1 + \xi)(1 - \xi) & 2(2 - \xi)(1 - \xi) \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = I_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + I_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i$$

经推导整理得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{0.84}{\sqrt{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r} (5 - 3\xi) \sqrt{3 - \xi}} [3\xi(1 - \xi)(3 - \xi)u_1 \\ &+ 2(1 - \xi)(3\xi^2 - 8\xi + 1)u_2 + 3\xi(1 - \xi)^2 u_3 + 8(1 + \xi)(1 - \xi)u_4 \\ &+ 3\xi(3 - \xi)(1 + \xi)u_5 + 2(1 + \xi)(3\xi^2 - 6\xi - 1)u_6 + \xi(3 + 4\xi - 3\xi^2)u_7 \\ &- 8(1 - \xi)u_8] = \frac{A_0}{\sqrt{r}} f(\xi) \end{aligned} \quad (29)$$

上式中 A_0 是与 r 无关的常数，而 $f(\xi)$ 是和 r 有关的变数，当 r 趋近于零， ξ 趋近于 -1 ， $f(\xi) \neq 0$ ，因此 ε_x 具有奇异性。但由于 $f(\xi)$ 是和 r 有关的变数，在对角线方向奇点邻域的 ε_x 并不与 $r^{-\frac{1}{2}}$ 成正比，以数字为例说明如下：当 $\xi = -0.9$ 时，(29) 式第一项是 $-\frac{1.105}{\sqrt{rL}} u_1$ ，当 $\xi = -0.99$ 时，第一项是 $-\frac{1.244}{\sqrt{rL}} u_1$ ，因此就奇异点附近 ε_x 是否与 $r^{-\frac{1}{2}}$ 成正比的意义上来说，在对角线方向 ε_x 虽有奇异性，但并不是 $r^{-\frac{1}{2}}$ 形式的奇异性。对 ε_y 也可作类似的推导，在除通过缝顶的二条边界外单元内部的其他射线也可得到类似的证明。

三、用四边形奇异性单元与退化三角形奇异性单元计算 K_I 的比较

当用有限单元法计算出裂缝体的应力和位移时，可根据式 (6) 用位移法或据式 (2) 用应力法来求 K_I 。通常是用裂缝面的张开位移即 $\theta = \pi$ 的结点位移 v 来计算 K_I 。当 $\theta = \pi$ ，如取式 (6) 的前四项并利用 (11) 则得

$$v = \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [(2k+2)] + D_1 r + D_2 r^{3/2} + D_3 r^2 \quad (30)$$

上式中 $D_1 = D_3 = 0$

令 $\bar{K}_I = \frac{2G}{K+1} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} v$ 则得

$$\bar{K}_I = K_I + Dr \quad (31)$$

即在 r 较小的范围内，可以认为 \bar{K}_I 和 r 有近似的线性关系。因此可绘出 $\bar{K}_I - r$ 曲线用外推法求得 $r = 0$ 时的 K_I 值就是 \bar{K}_I 值。当用 $\theta = 0$ 时的 σ_{YY} 来求 K_I 时可得类似于式 (31) 的公式

$$\bar{K}_I = K_I + Br \quad (32)$$

当用矩形奇异性单元按位移法计算 K_I 时，通常在缝顶单元 \bar{K}_I 值明显弯曲下降如图 6 所示。即缝顶单元的位移与解析解不相符合，这是由于矩形的奇异性单元仅在两条边界上有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性，不保证缝顶的应力和位移在 θ 为任意值时均具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 奇异性。这时就要除去相应于缝顶单元的 \bar{K}_I 值，用其他结点位移值求得的 \bar{K}_I 值按外推法求 K_I 值。当采用退化三角形奇异性单元时，如适当划分网格则可以消除 $\bar{K}_I - r$ 曲线在缝顶单元处弯曲下降的现象，如图 7 所示。即这时缝顶单元的位移符合解析解，这是由于退化三角形奇异性单元保证了 (7) - (9) 式在 θ 为任意值时均具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 奇异性的要求。

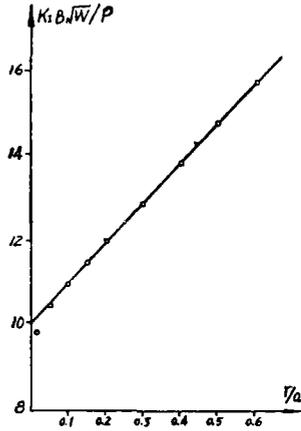


图6 紧凑拉伸 $a/w=0.5$ $\bar{K}_I - r$ 关系图 用矩形奇异性单元 58单元

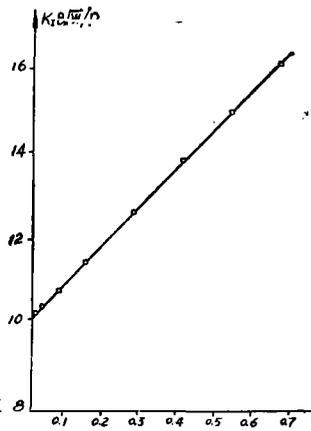


图7 紧凑拉伸 $a/w=0.5$ $\bar{K}_I - r$ 关系图 用退化三角形奇异性单元 46单元

表1给出了 $a/w=0.5$ 的紧凑拉伸试件用两种奇异性单元,按位移法和应力法计算 K_I 的结果。位移法用的是 $\theta = \pi$ 时缝顶单元结点的位移按(31)计算,应力法用的是 $\theta = 0$ 缝顶单元的应力按式(32)计算。

表1 $w/a=0.5$ 紧凑拉伸试件的 K_I 值

奇异性单元	单元数	边界配置法结果 $K_I B\sqrt{W}/P$	用位移法 计算结果	误差%	用应力法 计算结果	误差%
退化三角形	46	10.20	10.15	0.5	9.89	3.03
矩 形	58	10.20	9.6	5.9	12.69	24.2

从表1看出用退化三角形缝顶单元($\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$)的位移及应力和解析解是基本吻合的, $\theta = 0$ 处的应力误差为3.03%。而用矩形单元时 $\theta = 0$ 处的误差高达24.2%,这样用退化三角形奇异性单元的主要优点是可以较准确地求得缝顶单元的应力和位移值。正确地求得缝顶应力有助于对断裂力学问题的深入分析。

四、用退化三角形奇异单元位移值

求 K_I 的公式及计算成果

当采用退化三角形奇异单元时可以直接用缝顶单元的位移来计算 K_I 值而不必绘出 $\bar{K}_I - r$ 曲线用外推去求 K_I 。文献[7]取 Williams 应力函数的二项得到 $\theta = \pi$ 时的位移

$$V = \frac{K_I}{2G\sqrt{2\pi}} (K+1)\sqrt{r} + O(r) \tag{33}$$

同时考虑缝顶单元的位移插值函数得到

$$K_I = \frac{2G}{K+1} \sqrt{2\pi} (4V_B - V_C) / \sqrt{L} \tag{34}$$

上式中 V_B 、 V_C 是图 3 (a) 中 B 点及 C 点的张开位移。

由前所述当取 Williams 无穷级数为二项时 $D_1 = 0$ ，因此按 $D_1 \neq 0$ 所得到的 (33) 式来计算 K_I 是要影响计算精度的。我们根据 (31) 推导了计算 K_I 的公式。由 (31) 式并注意到图 3 (b) 中 B 点及 C 点至缝顶的距离分别为

$$r_B = \frac{1}{4}L, \quad r_C = L$$

$$\text{则得 } K_I = \bar{K}_{I,B} - \frac{1}{3} (\bar{K}_{I,C} - \bar{K}_{I,B}) = \frac{2G}{3(K+1)} \sqrt{2\pi} (8V_B - V_C) / \sqrt{L} \tag{35}$$

上式中 $\bar{K}_{I,B}$ 是 B 点的 \bar{K}_I 值， $\bar{K}_{I,C}$ 是 C 点的 \bar{K}_I 值。表 2 列出了一些有解析解答的平板，用退化三角形奇异单元按 (35) 式计算 K_I 值的结果。典型的网格图如图 8 所示。为了比较还给出了按 (34) 式计算 K_I 的结果。同时给出用缝顶单元的应力按式

(32) 计算 K_I 的结果。

从表 2 看出采用退化三角形奇异单元按 (35) 式计算 K_I 值得到了良好的精度。其最大误差为 1.92%，其中 $a/w = 0.5$ 时最大误差为 1.04%，而按式 (34) 计算 K_I 则最大误差为 5.64%。因此按建议的计算 K_I 的公式 (35) 提高了计算精度。此外，用缝顶单元 ($\theta = 0$) 的应力求得的 K_I 值误差在 10% 以内，也就是说，所求的应力误差在 10% 以内。这一精度也是比较好的，因为一般来说和位移法相比较用应力法求 K_I 的精度是较差的。

五、网格划分对 K_I 值计算结果的影响

为了研究网格划分对 K_I 值计算结果的影响，我们用 $a/w = 0.5$ 的紧凑拉伸平板及双边裂缝拉伸平板按不同网格尺寸计算了 K_I 值，其结果列在表 3 及表 4 中。

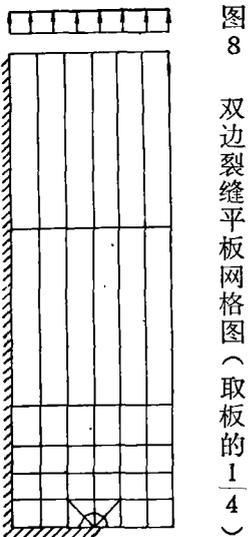


图 8 双边裂缝平板网格图 (取板的 $\frac{1}{4}$)

表3 $a/w = 0.5$ 的紧凑拉伸平板, 不同网格尺寸时的 K_I 值

单元数	L/a	边界配置法解 $K_I, B\sqrt{W}/P$	按式(35)计算	误差 %
4	1	10.20	8.78	13.9
8	0.5		9.25	9.3
14	0.25		10.03	1.7
24	0.125		10.00	2.0
42	0.075		10.14	0.6
46	0.036		10.15	0.5

表4 $a/w = 0.5$ 双边裂缝拉伸, 不同网格尺寸的 K_I 值

单元数	l/a	竖向×横向 单元层数 (参见图8)	Bowie 解 $\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	按公式(35) 计算结果	误差 %
26	0.25	5×4	1.151	1.160	0.8
42	0.166	6×6		1.162	0.96
62	0.125	7×8		1.159	0.7
46	0.125	5×8		0.878	23.7

从表3及表4看出对 $a/w = 0.5$ 平板, 用42单元, $L/a = 0.075$ 已能得到相当好的计算精度, 甚至二十几单元也能得到良好的精度, 例如(参见图8)表4中当单元数为46, 但在较长的竖向仅划分5层较横向8层少得较多, 其误差达23.7%, 精度反不如层数均匀的26单元的计算结果。

六、对形状复杂结构的应用

用退化三角形奇异单元计算了有裂纹大头坝的 K_I 值得到了良好的结果。对于应力具有奇异性的尖锐凹角亦布置奇异性单元, 可以提高计算精度。例如对图9所示结构当只在缝顶布置退化三角形奇异单元时 $K_I - r$ 曲线在缝顶单元下降, 而在凹角A处亦布置奇异性单元后, 所得 $K_I - r$ 曲线在缝顶单元无弯曲下降现象, 由图10所示。图10是52单元的计算结果。此外用75单元也得到相近的 K_I 值, 因此认为对图9所示较复杂结构所计算的 K_I 值有较好的精度。

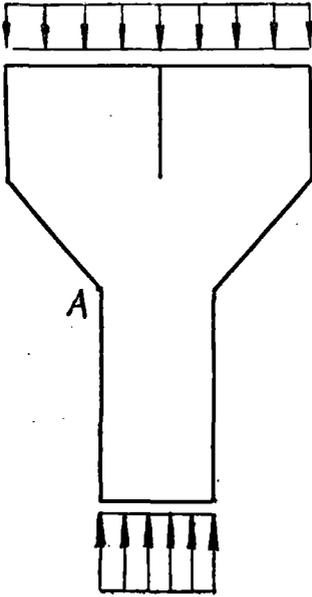


图 9

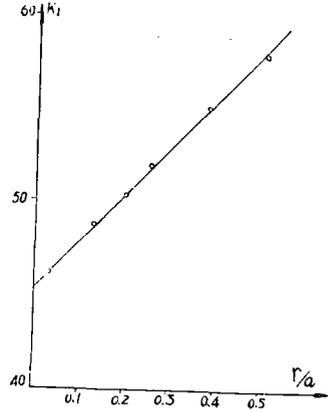


图 10 图 9 所示结构的 $\bar{K}_I - r$ 曲线

七、结 语

采用退化三角形奇异单元，适当划分网格，运用公式 (35) 计算 K_I 值能得到良好的精度，并能较准确地求得缝顶附近的应力和位移值。对于有凹角的裂纹体，在凹角处亦布置奇异单元可以提高计算精度。

参 考 文 献

- [1] R. D. Henshell and K. G. shaw, Crack tip finite elements are unnecessary, *Int. J. for Num. Mech. in engin.*, vol. 9 (1975), 495—507.
- [2] 陈旒等，工程断裂力学 (上册)，国防工业出版社。
- [3] 弹性力学问题的有限单元法，华东水利学院，水利电力出版社，1974。
- [4] R. S. Barsoum, Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. *Int. J. for Num. Mech. in engin.*, vol. 11 (1977), 85—98.
- [5] R. S. Barsoum, Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. of fracture*, 10 (1974), 603—604.
- [6] C. F. Shih, H. G. Delorenzi, and M. D. German, Crack extension

- modeling with singular quadrating isoparametric elements, *Int. J. of fracture*, 12 (1976), 647—651.
- [7] 用等参数奇性单元计算二维三维裂缝体的 K_I 值, 西安交通大学应用力学教研室。
- [8] O. L. Bowie, Rectangular tensile sheet with Symmetric edge cracks, *J. Appl. Mech.*, vol. 31, 1964, 208—212.
- [9] G. C. Sih, *Handbook of stress intensity factors*, 1973.

The Stress Intensity Factor K_I Calculated with the Strange Element of Equivalent Parameters by Using the 8-joint Retrogradeel Triangles

Huang SongMei Liu EnXi

(Hydro electric Scientific Research Institute of Xian,
Northwestern College of Agriculture)

Abstract

From discuss of singularity and calculating practice, this paper points out as follows. If the mesh is divided properly, the displacement and stress of the crack tip elements may be determined more accurately and the disadvantage of bending depress of $\bar{K}_I - r$ curve due to using of quadratic singular elements may be avoided by means of using singular elements of the degenerated triangle. According to the node displacement of crack tip element, the formula of \bar{K}_I is derived. The resultant of calculation coincides closely with analytic solution.

This method can be used in more complicated structure, and more accuracy of calculation may be obtained by utilizing singular elements at the concave corner for crack body.